

# КЛАСТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА СОГЛАСОВАННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Д.В. Дуплякин, А.С. Стукалов, В.А. Фурсов

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача параметрической идентификации объекта по  $N$  наблюдениям входного и выходного сигналов часто сводится к задаче построения оценки  $\hat{c}$   $M \times 1$ -вектора параметров  $c$  линейной модели объекта по  $N \times 1$ -вектору  $Y$  и  $N \times M$ - матрице  $X$  системы:

$$y = Xc + \xi, \quad (1)$$

сформированной по доступным для непосредственного наблюдения данным, где  $\xi$  - неизвестный  $N \times 1$ -вектор ошибки.

Методы и алгоритмы идентификации обычно строятся в рамках теории статистического оценивания. Однако при малом числе наблюдений они оказываются ненадежными, т.к. не выполняется основное условие статистической устойчивости: существование большого числа наблюдений.

В работах [1-3] рассматривался метод идентификации управляемого объекта, базирующийся на так называемом принципе согласованности оценок [4], который не связан с требованием статистической устойчивости. Идея метода заключается в поиске подсистемы наиболее свободной от шума [5] с использованием алгоритмов переборного типа. Метод специально ориентирован на случай малого числа наблюдений.

К сожалению, для систем вида (1) даже невысокой размерности объем вычислений, необходимых для нахождения искомой согласованной оценки, оказывается чрезвычайно большим. По-видимому, это является неизбежной платой за недостаток измерений. Иногда необходимость построения оценок по малому числу наблюдений связана с объективными трудностями их получения. Поэтому актуальной является задача создания программных средств нахождения «хороших» оценок за приемлемое время.

В настоящей работе приводится параллельный алгоритм согласованной идентификации и результаты исследования эффективности его реализации на вычислительных кластерах Tsunami Technologies Inc. (Orlando, FL USA). Приводятся данные, как о качестве искомых оценок параметров системы (1), так и результаты исследования показателей эффективности реализации параллельного алгоритма.

## 2. МЕТОД СОГЛАСОВАННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Из  $N$  строк исходной системы (1) сформируем, например,  $L$  подсистем размерности  $P$ :

$$y_l = X_l c + \xi_l, \quad l = \overline{1, L}, \quad (2)$$

где  $X_l$  -  $P \times M$  - матрицы, а  $y_l, \xi_l$  -  $P \times 1$  - векторы.

Из  $P$  строк каждой  $l$ -й подсистемы (2), в свою очередь, сформируем  $K_l$  подсистем размерности  $S$ :

$$y_{l,i} = X_{l,i} c + \xi_{l,i}, \quad i = \overline{1, K_l}, \quad l = \overline{1, L}. \quad (3)$$

Подсистемы (2) и (3) далее будем их называть подсистемами верхнего и нижнего уровня соответственно. Индекс  $i$  здесь и далее служит для обозначения номера подсистемы нижнего уровня и соответствующих ей  $S \times M$  - матрицы  $X_{l,i}$  и  $S \times 1$  - векторов  $y_{l,i}, \xi_{l,i}$ . Предполагается также, что для всех  $i = \overline{1, K_l}$  и  $l = \overline{1, L}$   $\text{Rank } X_{l,i} = M$ , т.е. все подсистемы нижнего уровня имеют полный ранг (в вычислительной процедуре это обеспечивается дополнительной проверкой).

С использованием введенных подсистем принцип согласованности формулируется следующим образом. Пусть для каждой  $i$ -й подсистемы нижнего уровня, сформированной из  $l$ -й подсистемы верхнего уровня, вычислен вектор оценок  $\hat{c}_{l,i}$ . Пусть также задана функция, характеризующая взаимную (парную) близость множества полученных решений  $\hat{c}_{l,i}$ :

$$W_l[l] = \sum_{i,j \in K_l} (c_{l,i} - c_{l,j}), \quad l = \overline{1, L}. \quad (4)$$

Искомая (согласованная) оценка  $\hat{c}$  ищется на подсистеме с номером  $l^*$ , для которой функция взаимной близости (4) минимальна:

$$W[l^*] = \min_{\forall l} W[l], \quad l = \overline{1, L}. \quad (5)$$

В работах [1-3] показано, что подсистема верхнего уровня, для которой функция взаимной парной близости удовлетворяет (5) обычно оказывается также наиболее свободной от шума [4]. Поэтому есть основания ожидать,

что построенная на этой подсистеме оценка даже в случае нормальных помех будет, по крайней мере, не хуже, чем оптимальная для этого случая оценка МНК.

Заметим, что правило вычисления искомой оценки на подсистеме верхнего уровня может быть любым, в т.ч. не связанным с методом вычисления оценок на подсистемах нижнего уровня. В частности, может строиться более устойчивая к ошибкам в наблюдениях оценка метода наименьших модулей и др. В любом случае основной объем вычислительной работы связан с получением множества оценок на подсистемах нижнего уровня, т.к. число вариантов этих подсистем, даже при небольшой размерности исходной системы, чрезвычайно велико. Ниже приводится разработанный для этой цели параллельный алгоритм.

### 3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОГЛАСОВАННЫХ ОЦЕНОК

Параллельный алгоритм строится с использованием одного из процессов в качестве корневого. Связано это с тем, что этот процесс существенно отличается по своему функциональному наполнению от всех других процессов, которые, в отличие от корневого, будем называть рабочими. Алгоритм строится в виде следующей последовательности шагов.

1. Шаг 1. Выполнение предварительных вычислений рабочими процессами.
2. Шаг 2. Рассылка корневым процессом матрицы  $X$  и вектора  $Y$  рабочим процессам.
3. Шаг 3. Вычисление оценок для всех подсистем нижнего уровня рабочими процессами.
4. Шаг 4. Обмен вычисленными оценками между всеми рабочими процессами.
5. Шаг 5. Вычисление рабочими процессами значений функции взаимной близости на подсистемах верхнего уровня, поиск среди них наименьшего значения.
6. Шаг 6. Пересылка корневому процессу информации о наилучшей подсистеме верхнего уровня, вычисленной каждым рабочим процессом на выделенном ему множестве подсистем.
7. Шаг 7. Определение корневым процессом наилучшей подсистемы верхнего уровня.
8. Шаг 8. Построение корневым процессом искомой конечной оценки с использованием наблюдений, входящих в отобранную по показателю взаимной близости оценок подсистему верхнего уровня.

В данном случае в интересах проведения сравнительных исследований корневым процессом реализуется также вычисление оценок параметров модели по обычной схеме метода наименьших квадратов.

Разбиение множества подсистем нижнего уровня реализовано таким образом, что каждый рабочий процесс определяет интервал номеров «своих» перестановок по его собственному номеру и общему количеству процессов. Под номером перестановки в данном случае понимается ее номер в лексикографическом порядке.

Пункты 5, 6 и 7 по существу представляют собой двухэтапную процедуру поиска наилучшей подсистемы верхнего уровня, в которой корневым процессом отыскивается подсистема с наименьшим значением функции взаимной близости на сравнительно небольшом множестве подсистем верхнего уровня, уже отобранных в рабочих процессах. Поскольку корневым процессом не используется информация обо всех подсистемах верхнего уровня, объем пересылаемых данных ограничивается количеством рабочих процессов.

### 4. СРАВНЕНИЕ СОГЛАСОВАННЫХ ОЦЕНОК С МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Для сравнительной оценки качества согласованных оценок проводился численный эксперимент с использованием сформированных систем различных размерностей. Компоненты матрицы  $X$  входного сигнала моделировались как случайные величины с нормальным распределением  $N(0; 1)$ . Помехи моделировались как смесь нормальных  $N(0; 0,1)$  и аномальных ошибок. Аномальные ошибки имели равномерное распределение на отрезке  $[0; 10]$ . Вероятность аномальных ошибок в смеси составляла 0,1. Эксперимент состоял из серии 1000 реализаций системы (1).

Для каждой реализации с использованием описанного выше параллельного алгоритма вычислялись оценки по методу согласованной идентификации (МСИ), далее обозначаемые как  $c_{МСИi}^*$  ( $i = \overline{1, M}$ ) и МНК-оценки -  $c_{МНКi}^*$  ( $i = \overline{1, M}$ ). Введена относительная оценка достоверности сравниваемых методов как отношение вероятностей получения точных значений параметров

$$\Lambda_{(МНК, МСИ)} = \frac{P_{МНК}}{P_{МСИ}} = \frac{L_{МНК}}{L_{МСИ}} = \frac{\prod_{i=1}^n f(c_{МНКi})}{\prod_{i=1}^n f(c_{МСИi})}$$

Здесь  $L_* = \prod_{i=1}^m f(c_* i)$  – функция правдоподобия.

Поскольку полезные сигналы моделировались как реализации нормальных случайных величин, а помехи представляли собой смесь случайных величин, с большой вероятностью содержащую нормально распределенные случайные величины, распределение оценок параметров также можно полагать приближенно нормальным:

$$f(c_i) = \frac{1}{S_i^* \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\hat{c}_i - m_i^*)^2}{2(S_i^*)^2}\right],$$

где  $m_i^*$  – выборочное математическое ожидание параметра  $c_i$ ,  $S_i^*$  – выборочное среднее квадратическое отклонение.

На рисунке 1 приведены графики, иллюстрирующие характер группировки семейств плотностей распределений оценок параметров, полученных двумя исследуемыми методами в 1000 независимых реализациях для двух вариантов размерности системы (1):  $N=16, P=14, M=10$  и  $N=20, P=16, M=12$  (параметр сдвига этих распределений как и следовало ожидать равен 1, поскольку такими задавались истинные значения параметров модели).

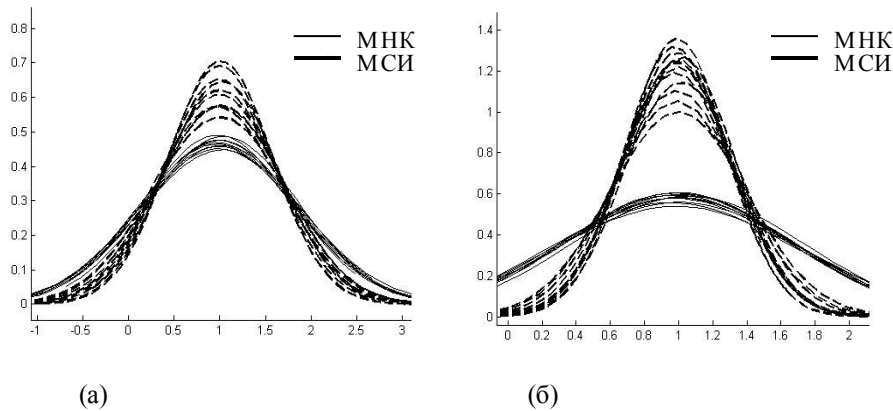


Рис. 1. Сравнение методов идентификации

Из графиков видно, что в окрестности истинных значений  $c_i = 1$  ( $i = 1, M$ ) оценки, полученные с использованием метода согласованных оценок МСИ, более вероятны. Рассчитанные отношения правдоподобия оценок  $\Lambda_{(МНК, МСИ)} = 0,063$  в случае (а) и  $\Lambda_{(МНК, МСИ)} = 0,00016$  в случае (б) свидетельствуют о более высокой эффективности согласованных оценок в условиях описанных шумов.

## 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НА КЛАСТЕРАХ

Программа, реализующая описанный параллельный алгоритм написана на языке С с использованием интерфейса передачи сообщений MPI. Несмотря на то, что размерность матрицы системы (1) в эксперименте не превышала 20 строк и 12 столбцов, реализация метода согласованной идентификации предъявляла высокие требования к производительности процессоров вычислительной системы и скорости передачи данных.

Поэтому для проведения экспериментов были выбраны сравнительно мощные вычислительные кластеры Tsunamic Technologies Inc. (Orlando, FL USA). Подробные описания характеристик использованных вычислительных кластеров приведены в таблице 1.

Название	GREEN	ORANGE
Описание	AMD Athlon 64 X2 Dual Core 3GHz Processors 3GB RAM (1,5 GB/core) 32-bit Linux	2 Intel Xeon Quad Core 2.33GHz Processors 8GB RAM (1.0GB/core) 64-bit Linux
Узлов/ядер	40 узлов, 2 ядра на каждом Всего ядер 80	41 узел, 8 ядер на каждом Всего ядер 328

Таблица 1. Кластеры Tsunami Technologies Inc.

Исследование коммуникаций на предоставленном оборудовании позволило выявить следующие особенности.

- Фактическая скорость передачи данных между процессорами составляет 680 Мбайт/сек.
- Рассылка матрицы  $X$  и вектора  $Y$  одним блоком данных происходит значительно быстрее, чем в отдельности, что видно из рисунка 2. Этот эффект объясняется уменьшением суммарной латентности при уменьшении количества пересылок при неизменном суммарном объеме пересылаемых данных.
- Возрастающий характер зависимости времени всех коммуникаций от количества процессов (рис. 3) объясняется ростом числа пересылаемых сообщений, и, как следствие, увеличением суммарной латентности.

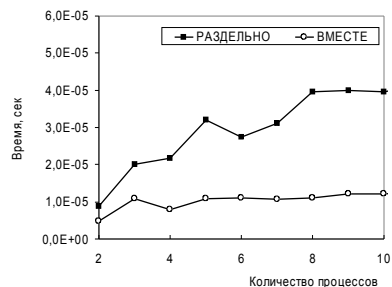


Рис.2. Время рассылки X и Y

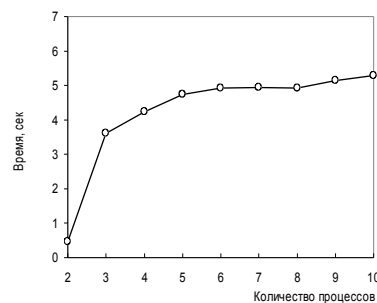


Рис.3. Время всех коммуникаций

Разработанная параллельная программа сравнивалась с последовательным аналогом, выполняющим те же вычисления при тех же исходных данных. Результаты сравнения в виде графиков ускорения и эффективности представлены на рисунках 4 и 5. Для того чтобы последовательная программа имела приемлемое время реализации, был взят усеченный вариант системы с размерностями  $N = 18$ ,  $P = 16$ ,  $M = 10$ . При этом для решения одной системы требовалось в среднем около одной минуты, а время работы последовательной программы возрастало (ростом размерностей) по экспоненциальной зависимости.

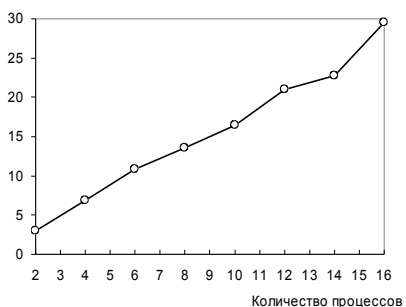


Рис.4. Ускорение

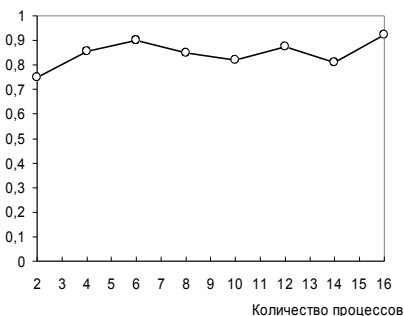


Рис.5. Эффективность

Наибольшая производительность достигнута на кластере ORANGE с использованием 32 узлов с 8 ядрами на каждом. Такая производительность позволила решать системы больших размерностей ( $N = 30$ ,  $P = 27$ ,  $M = 24$ ) менее чем за 9 секунд.

Таким образом, продемонстрирована высокая эффективность разработанного параллельного алгоритма. Важным является также то, что с использованием мощных вычислительных ресурсов удалось впервые исследовать МСИ на системах относительно больших размерностей. Предложенная методика сравнения методов идентификации по критерию относительной достоверности подтвердила преимущество МСИ над МНК, что согласуется с выводами, сделанными в условиях аналогичных шумов на системах меньших размерностей в предшествующих работах.

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» и РФФИ (грант № 06-08-01024).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Никоноров А.В., Попов С.Б., Фурсов В.А. Применение принципа согласованности оценок в задаче идентификации моделей цветовоспроизведения. // Известия Самарского научного центра РАН. т.4, №1. - 2002. с. 159-164.
2. А.В. Никоноров, С.Б. Попов, В.А. Фурсов. Принцип согласованности оценок в задаче идентификации. Алгоритмы параллельной реализации. Тр. Всероссийской конференции «Высокопроизводительные вычисления и технологии». Ижевск, 27-30 октября, 2003 г.с. 130-134
3. V. A. Fursov, A. V. Gavrilo. Parallel algorithm of data selection using relative conforming estimate criterion / Proceedings of The 12th ISPE International Conference on Concurrent Engineering: Research and Applications, Ft. Worth/Dallas, USA, 25 - 29 July, 2005, p. 375-380.
4. Р.Е. Калман, Идентификация систем с шумами. *Успехи математических наук*, № 40, вып. 4(244), 1985.