# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ СВЕРХБОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**И.В. Оселедец**

Численное решение уравнений в пространствах размерности d>10 наталкивается на так называемое «проклятие размерности»: сложность вычислений и требуемая для этого память растёт по d экспоненциально. Даже для очень успешных методов (например, метод «разреженных сеток», sparse grid) вычислительная сложность ведёт себя как r^d, где r порядка 5, т.е. d не может быть больше 15. Поэтому необходимо искать малопараметрическое представление для всех используемых многомерных объектов (матриц, векторов, операторов) и работать исключительно в терминах этих параметров.

Предполагая тензорную структуру области, в которой решается уравнение, мы получаем различные многомерные массивы, или тензоры. Тензорное или каноническое разложение является хорошим кандидатом для эффективного представления тензоров. Однако, не существует надёжных методов вычисления такого представления, более того, часто оно само является неустойчивым. В работе предлагается новое разложение тензоров, названное ТТ-форматом, которое позволяет избавиться от этих недостатков и существенно уменьшить число параметров. Получение такого разложение основано на стандартных алгоритмах линейной алгебры, QR и SVD разложениях, и даёт простой и понятный путь к построению эффективных алгоритмов для всех базовых операций. В их числе: матрично-векторное умножение, скалярное произведение, вычисление нормы. Сам код занимает всего несколько сотен строчек. В качестве иллюстрации, мы посчитали наименьшее по модулю собственное значение оператора, заданного на 19-мерном кубе. Число точек по одному измерению 64, и хранение собственного вектора потребовало бы 10^(15) Петабайт. Расчёты же с помощью ТТ-формата заняли несколько минут.

Новые методы, основанные на тензорном разложении, позволяют справится с проклятием размерности в сверхбольших задачах. Однако реальное время счёта для реальных задач всё ещё остаётся большим, и здесь не обойтись без современных высокопроизводительных систем, так как с экспоненциальной сложностью нельзя бороться наращивая вычислительные ресурсы, а с полиномиальной — можно и нужно.

ЛИТЕРАТУРА:

1. И.В. Оселедец, Е.Е. Тыртышников, Рекурсивное разложение многомерных тензоров, //ДАН 427(1), 2009
2. И.В. Оселедец, О новом тензорном разложении // ДАН 427(2), 2009.
3. И.В. Оселедец, О приближении матриц логарифмическим числом параметров // ДАН 427(5), 2009
4. I.V. Oseledets, E.E. Tyrtyshnikov, Breaking the curse of dimensionality, or how to use SVD in many dimensions // Препринт 2009-01 ИВМ РАН, submitted to SISC, 2009.
5. I.V. Oseledets, Compact matrix form of the d-dimensional tensor decomposition // submitted to SISC, 2009
6. I.V. Oseledets, Tensors inside of matrices give logarithmic complexity // submitted to SIMAX, 2009.