

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОГО АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

К.Д. Овчинникова

Введение

Вычислительные средства широко используются для математического моделирования проблем механики сплошной среды. При исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т.е. конвективный перенос. В газо- и гидродинамике в качестве базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи для стационарных или нестационарных уравнений конвекции-диффузии. В частности, большое значение приобретают экологические проблемы, связанные с описанием процессов распространением примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод.

В данной работе методом конечного объема получена схема второго порядка аппроксимации для двумерного уравнения конвекции-диффузии. Эта цель была достигнута при использовании интегрального тождества Г. И. Марчука. Полученная схема пятиточечных уравнений решается явным методом Булеева. Исследованы вопросы аппроксимации, сходимости и устойчивости полученной схемы. Построенная схема является монотонной, что исключает появление нефизических решений. Представлена параллельная реализация алгоритма численного решения уравнения конвекции-диффузии. Показаны эффективность и ускорение параллельной программы.

Постановка задачи

Решить смешанную краевую задачу вида

$$\frac{\partial v_1(x, y)u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y)u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) + f(x, y) - r(x, y)u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$\alpha u|_{\partial\Omega} + \beta \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

где $v_1(x, y), v_2(x, y), p(x, y), r(x, y), f(x, y)$ - известные функции.

Интегральное тождество Г.И. Марчука для уравнения конвекции-диффузии

Рассмотрим двумерное уравнение конвекции-диффузии (1).

Введем функции $S(x, y) : v_1(x, y) = p(x, y) \frac{\partial S(x, y)}{\partial x}$;

$$T(x, y) : v_2(x, y) = p(x, y) \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} .$$

Тогда проекции вектора потока будут иметь вид

$$J^x = v_1 u - p \frac{\partial u}{\partial x} = p \frac{\partial S}{\partial x} u - p \frac{\partial u}{\partial x} = -p e^S \frac{\partial}{\partial x} (e^{-S} u) ;$$

$$J^y = v_2 u - p \frac{\partial u}{\partial y} = p \frac{\partial T}{\partial y} u - p \frac{\partial u}{\partial y} = -p e^T \frac{\partial}{\partial y} (e^{-T} u) .$$

Возьмем прямоугольную сетку, как показано на рисунке 1. Сплошной линией обозначена граница области, а пунктирной – границы ячеек. Центры фиктивных ячеек помечены квадратами. Интегрирование будет производиться по внутренним ячейкам.

$$x_{i-1/2} = a + (i-1)h_i^x, \quad y_{j-1/2} = c + jh_j^y, \quad i = \overline{1, N_x}, \quad j = \overline{1, N_y} \quad \text{- границы ячеек.}$$

$$(x_i, y_j) = (a + ih_i^x - h_i^x/2, c + jh_j^y - h_j^y/2), \quad i = \overline{1, N_x}, \quad j = \overline{1, N_y} \quad \text{- центры ячеек.}$$

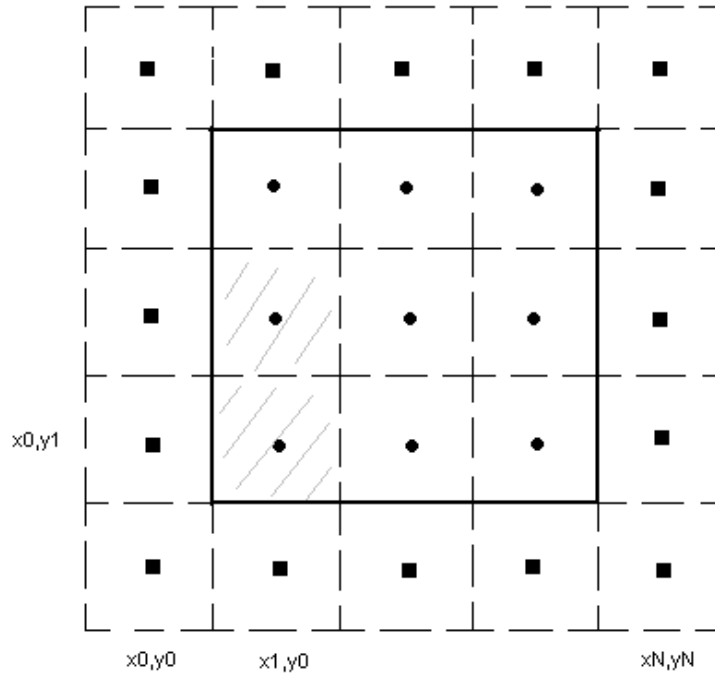


Рис. 1 – Дискретизация области

Далее, следуя [6], для уравнения

$$\frac{\partial J^x}{\partial x} + \frac{\partial J^y}{\partial y} = f - ru$$

получим интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left(\frac{-(e^{-S}u)_{i+1} + (e^{-S}u)_i}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{pe^S}} - \frac{-(e^{-S}u)_i + (e^{-S}u)_{i-1}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{pe^S}} \right) dy + \\ & + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{-(e^{-T}u)_{j+1} + (e^{-T}u)_j}{\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{dy}{pe^T}} - \frac{-(e^{-T}u)_j + (e^{-T}u)_{j-1}}{\int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{dy}{pe^T}} \right) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (f - ru) dx dy + \psi_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

Тождество (2) может служить основой для вывода различного типа разностных уравнений после применения тех или иных формул приближенного интегрирования. Последний член ψ_{ij} проще всего отбросить, так как после применения квадратурных формул центральных прямоугольников он обращается в нуль, т.е. является величиной порядка $O(h^3)$. Если далее к (2) применить простейшие квадратурные формулы прямоугольников, то получим пятиточечную аппроксимацию

$$\begin{aligned} & - \frac{\exp(S_{i+1/2j} - S_{i+1j}) p_{i+1/2j}}{h_x} h_y u_{i+1j} - \frac{\exp(S_{i-1/2j} - S_{i-1j}) p_{i-1/2j}}{h_x} h_y u_{i-1j} - \\ & - \frac{\exp(T_{ij+1/2} - T_{ij+1}) p_{ij+1/2}}{h_y} h_x u_{ij+1} - \frac{\exp(T_{ij-1/2} - T_{ij-1}) p_{ij-1/2}}{h_y} h_x u_{ij-1} + \\ & + \frac{\exp(S_{i+1/2j} - S_{ij}) p_{i+1/2j}}{h_x} h_y u_{i,j} + \frac{\exp(S_{i-1/2j} - S_{ij}) p_{i-1/2j}}{h_x} h_y u_{i,j} + \\ & + \frac{\exp(T_{ij+1/2} - T_{ij}) p_{ij+1/2}}{h_y} h_x u_{i,j} + \frac{\exp(T_{ij-1/2} - T_{ij}) p_{ij-1/2}}{h_y} h_x u_{i,j} = (f_{ij} - r_{ij} u_{ij}) h_x h_y \end{aligned} \quad (3)$$

которая имеет погрешность $O(h^2)$ на равномерной сетке и, естественно, первый порядок – на неравномерной. Для (3) выполняется принцип максимума, когда функции $v_1(x, y), v_2(x, y) p(x, y)$

имеют постоянные значения, т.е. разностная схема монотонная, в этих же условиях схема абсолютно устойчива. Пятиточечная система (3) может решаться методом Булева.

Явный метод Булева для решения двумерных пятиточечных уравнений

По аналогии с методом прогонки для трехточечных сеточных уравнений будем искать решение системы

$$-a_{ij}u_{i-1j} - b_{ij}u_{ij-1} - c_{ij}u_{i+1j} - d_{ij}u_{ij+1} + e_{ij}u_{ij} = f_{ij}$$

в виде

$$u_{ij} = P_{ij}u_{i+1j} + Q_{ij}u_{ij+1} + R_{ij} \quad (4)$$

с неопределенными пока величинами P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij} . Выражая с помощью этого рекуррентного соотношения величины $u_{i-1,j}, u_{ij-1}$ и подставляя их в первые два члена исходного уравнения, получаем

$$\begin{aligned} & -a_{ij}(P_{i-1j}u_{ij} + Q_{i-1j}u_{i-1j-1} + R_{i-1j}) - \\ & -b_{ij}(P_{ij-1}u_{i+1j-1} + Q_{ij-1}u_{ij} + R_{ij-1}) - \\ & -c_{ij}u_{i+1j} - d_{ij}u_{ij+1} + e_{ij}u_{ij} = f_{ij} \end{aligned}$$

Последнее равенство приведем теперь к форме

$$\begin{aligned} & [e_{ij} - a_{ij}P_{i-1j} - b_{ij}Q_{ij-1}]u_{ij} = \\ & = c_{ij}u_{i+1j} + d_{ij}u_{ij+1} + a_{ij}R_{i-1j} + b_{ij}R_{ij-1} + \\ & + a_{ij}Q_{i-1j}u_{i-1,j+1} + b_{ij}P_{ij-1}u_{i+1j-1} + f_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

Если обе части (5) поделить на выражение в квадратных скобках, то получим соотношение, аналогичное по структуре (4). Отсюда мы получаем формулы для определения P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij} . Но поскольку при этом величины R_{ij} зависят от неизвестных u_{ij} , алгоритм оказывается итерационным, а его формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{ij}^n &= \alpha_{ij}R_{i-1j}^n + \beta_{ij}R_{ij-1}^n + \alpha_{ij}Q_{i-1j}^n u_{i-1j+1}^{n-1} + \beta_{ij}P_{ij-1}^n u_{i+1j-1}^{n-1} + \phi_{ij} \\ \alpha_{ij} &= a_{ij}/g_{ij}, \quad \beta_{ij} = b_{ij}/g_{ij}, \quad P_{ij} = c_{ij}/g_{ij}, \quad Q_{ij} = d_{ij}/g_{ij}, \quad \phi_{ij} = f_{ij}/g_{ij}, \\ g_{ij} &= e_{ij} - a_{ij}P_{i-1j} - b_{ij}Q_{ij-1}, \quad i=1,2 \dots Nx; \quad j=1, \dots, Ny; \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_{ij}^n = P_{ij}u_{i+1j}^n + Q_{ij}u_{ij+1}^n + R_{ij}^n \quad (7)$$

Таким образом, каждая итерация состоит из двух этапов – прямого и обратного счета при выбранной упорядоченности узлов. Надо только, чтобы при обработке текущего узла на прямом ходе были уже пересчитаны его левый и нижний «соседи», а на обратном - правый и верхний. Выписанные рекурсии для R_{ij}^n и u_{ij}^n «стартуют» автоматически, так как если для околограничного (i,j) – го узла какие-то из узлов $(i-1,j)$, $(i,j-1)$, $(i+1,j)$ или $(i,j+1)$ внешние, то в силу учета краевых условий в исходных уравнениях соответствующие коэффициенты $a_{ij}, \beta_{ij}, P_{ij}$, или Q_{ij} будут нулевыми. Достаточным условием сходимости метода является выполнение неравенств $|P_{ij}| < 1$ и $|Q_{ij}| < 1$.

Тестовая задача

Пусть имеется дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = p \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + f(x, y), \quad (x, y) \in (0,1) \times (0,1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} C(x,0) &= \cos x, \quad \frac{\partial C}{\partial y}(x,1) = -\sin x \cos x, \quad x \in [0,1], \\ C(0,y) &= \cos y, \quad \frac{\partial C}{\partial x}(1,y) = -\sin y \cos y, \quad y \in [0,1] \end{aligned}$$

где u, v, p - константы. Если взять

$$f(x, y) = -u \sin x \cos y - v \cos x \sin y + 2p \cos x \cos y,$$

то аналитическое решение задачи будет иметь вид: $C(x, y) = \cos x \cos y$.

Используя (3), построим разностную схему, в которой $S(x, y) = \frac{u \cdot x}{p}$, $T(x, y) = \frac{v \cdot y}{p}$.

Аппроксимация граничных условий:

$$\frac{C_{i^*} + C_{i^*}}{\gamma} = \cos(x_i), \quad \frac{C_{iNy} - C_{iNy-1}}{h_y} = -\sin y \cos(x_i), \quad i = \overline{1, Nx}, \quad (8)$$

$$\frac{C_{0j} + C_{1j}}{2} = \cos(y_j), \quad \frac{C_{Nxj} - C_{Ny-1j}}{h_x} = -\sin l \cos(y_j), \quad j = \overline{0, Ny}, \quad (9)$$

Разностная схема (3),(8) – (9) имеет погрешность аппроксимации $O(h_x^2 + h_y^2)$.

Система (3), (8) – (9) решается итерационным методом Булеева с критерием сходимости $\varepsilon = 10^{-5}$.

Таблица 1 – Результаты расчетов

Сетка	Количество итераций	Время работы программы, сек	$\max_{ij} u_{ij} - \phi(x_i, y_j) $ (условие сходимости к точному решению)	$\max_{ij} c_{ij} u_{ij} - \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} - b_{ij} $ (условие сходимости метода Булеева)
100*100	1928	1,419	9.96e-05	5,5e-07
200*200	7805	30.43	9.99e-05	9.84e-08
400*400	31232	768,35	9,99e-05	2,26e-08

Из таблицы 1 видно, что при уменьшении шага сетки время работы программы за счет увеличения числа итераций стремительно растет. Поэтому является целесообразным построение параллельного алгоритма.

Параллельная реализация задачи конвекции-диффузии

Для решения двумерной задачи конвекции-диффузии разработана параллельная программа на языке Fortran. Использовалась одномерная декомпозиция по данным (Рис.2). Каждому процессору выделяется равная часть области исследования, что обеспечивает равномерность вычислительной нагрузки на процессоры.

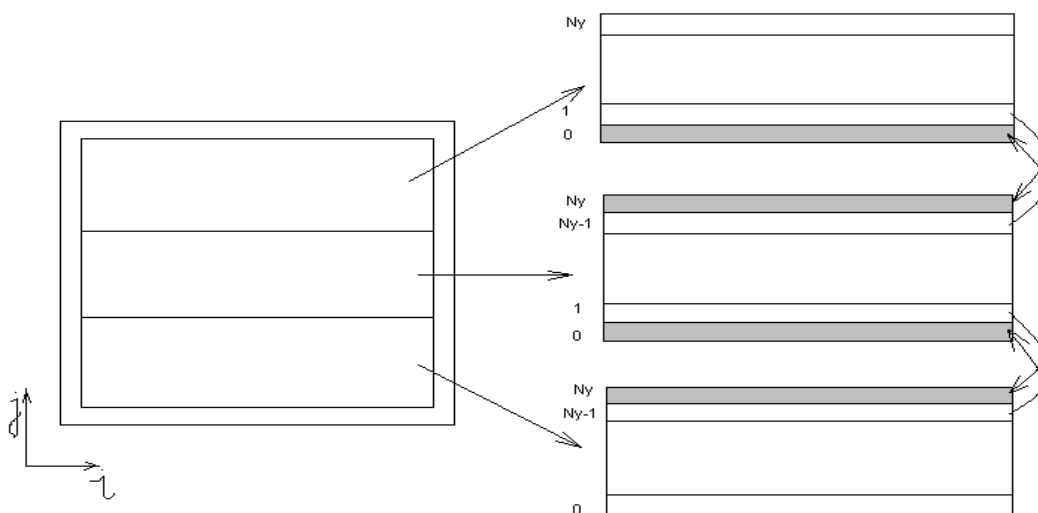


Рис. 2 – Декомпозиция расчетной области

Для вычисления прогоночных коэффициентов и численного решения требуется знать значения в соседних узлах (которые могут вычисляться и находиться в адресном пространстве других процессов). По этой причине используется так называемая схема с наложением, т.е. при организации вычислений массивы, с которыми оперируют параллельно выполняющиеся процессы, должны быть в общем случае окаймлены сверху и снизу двумя строками, куда помещаются данные, рассчитываемые соседними процессами (на рис.2 строки выделены серым).

Распараллеливание метода Булеева производилось на основе асинхронного подхода. Так как этот метод предусматривает многократный проход от одного угла расчетной области к другому через всю область, то прямой и обратный ходы прогонки метода Булеева организуются не по всей области, а по подобластям. На границах «разрезов» ставятся условия первого рода, то есть предполагается, что значение, прилежащее к границе «разреза» с внешней стороны, точно известно. В действительности же, это значение рассчитывается соседним процессом на предыдущей итерации и нуждается в постоянной синхронизации. Для обмена данными между процессорами применялась библиотека передачи сообщений MPI.

Параллельная реализация алгоритма метода Булеева

Рассмотрим случай использования двух процессорных элементов. Вдоль вертикального направления, по которому выполняется декомпозиция, производится перенумерация узлов следующим образом. Нулевой вычислительный процесс ведет расчеты в подобласти с вертикальной нумерацией узлов с нулевого, до узла с

номером $N_y = N_{y_{max}}/2$ (под делением подразумевается целочисленная операция). Вычислительная область нулевого процесса окаймляется сверху строкой, в которую заносятся данные, рассчитываемые первым процессом. Таким образом, область, располагающаяся в адресном пространстве нулевого процесса состоит из $N_{y_{max}}/2+1$ строки. Аналогичным образом, область, располагающаяся в адресном пространстве первого процесса состоит из $N_{y_{max}}/2+1$ строк с нумерацией узлов с нулевого до $N_y = N_{y_{max}}/2$. Данные, получаемые от нулевого процесса, заносятся в нулевую строку первого процесса, а с первого заносятся в строку с номером N_y нулевого процесса.

Алгоритм параллельной реализации метода Булеева состоит из следующих шагов:

1. Декомпозиция расчетной области на p процессов; каждый процесс получает информацию о своем номере и об общем количестве процессов, определяет номера своих соседей и границы своей подобласти;
2. Получение каждым процессом начального приближения для своей подобласти;
3. Расчет значений прогоночных коэффициентов P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij} вдоль левой и нижней границ (на нулевом процессе вдоль нижней границы задается граничное условие, а для остальных условие первого рода, т.е. передается значение с соседнего нижнего процесса);
4. Расчет значений прогоночных коэффициентов для остальных узлов расчетной области по формулам (6);
5. Расчет значения функции C_{ij} в узлах расчетной области по формуле (7);
6. Посылка значений строк с номерами 1 и N_y-1 нижнему и верхнему соседу соответственно; прием от нижнего соседа значений в строку с номером 0 и от верхнего соседа значений в строку с номером N_y ;
7. В случае выполнения неравенства $\max_{ij} |f_{ij} + a_{ij} C_{i-1j} + b_{ij} C_{ij-1} + d_{ij} - e_{ij} C_{ij}| > eps$ – возврат к п. 3;
8. Получение решения для всей области путем пересылки решения, полученного каждым процессом, какому-либо одному процессу (например, нулевому).

Оценка ускорения и эффективности параллельного алгоритма

Проведем теоретическую оценку ускорения параллельной программы, выполняющейся на p узлах по отношению к последовательной программе. Примем за t_a время одной арифметической операции, t_o - время для передачи одного числа между процессами. Пусть расчетная сетка $N_x N_y$ узлов. Тогда время, затраченное на нахождение решения на одном итерационном шаге для последовательной программы, можно оценить как

$$T_1 = \underbrace{19N_x N_y t_a}_{\text{Прогоночные коэффициенты}} + \underbrace{4N_x N_y t_a}_{\text{Вычисление решения}} = 23N_x N_y$$

На p процессах время счета складывается из времени выполнения арифметических операций и времени передачи данных между процессами:

$$T_p = T_p^a + T_p^o = \underbrace{\frac{19N_x N_y t_a}{p}}_{\text{Прогоночные коэффициенты}} + \underbrace{\frac{4N_x N_y t_a}{p}}_{\text{Вычисление решения}} + \underbrace{2(p-1)N_x t_o}_{\text{Время обменов}}$$

Тогда ускорение Sp будет

$$Sp = \frac{T_1}{T_p} = \frac{p}{1 + \frac{2(p-1)p\chi}{23N_y}}, \text{ где } \chi = \frac{t_o}{t_a}$$

Численное ускорение для задачи (3), (8) – (9) на кластере СКИФ Сувегия показано в таблице 2. Из таблицы 2 также видно, что с ростом числа процессоров увеличивается и число итераций. Этот эффект наблюдается из-за того, что увеличивается число «разрезов» области, на границах которых задаются не точные значения, а значения рассчитываемые на соседних процессорах на предыдущей итерации.

Таблица 2 – Время работы параллельного алгоритма Булеева для тестовой задачи (3), (8)-(9). Сетка 400*400 узлов.

Число процессоров	Время работы алгоритма, сек	Число итераций	Ускорение $Sp = \frac{T_1}{T_p}$	Эффективность $Ep = \frac{Sp}{p}$
1	764,52	31232	----	----
2	379,27	31395	2,01	1,01

4	226,73	31745	3,37	0,84
5	161,01	31922	4,75	0,95
8	70,06	32458	10,91	1,36
10	49,76	32816	15,36	1,54
16	29,58	33891	25,85	1,62
20	25,72	34609	29,73	1,49
25	20,08	35506	38,07	1,52
50	18,84	39992	40,57	0,81

Более наглядно данные для ускорения из таблицы 2 можно представить на графике (рис. 3). Видно, что численное ускорение превышает идеальное. Это объясняется тем, что при увеличении числа процессоров, уменьшается число данных в подобласти и, начиная с какого-то момента, все данные могут быть помещены в КЭШ.

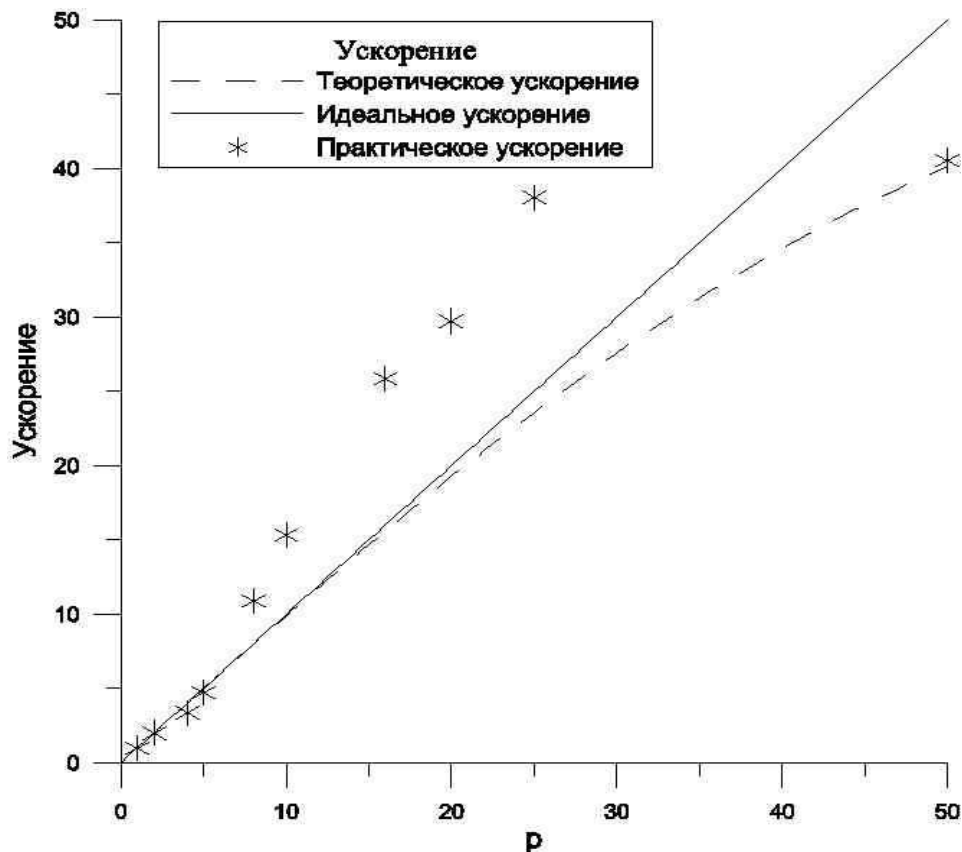


Рис. 3 – График ускорения параллельного алгоритма в зависимости от числа процессоров

Применение интегрального тождества для решения нестационарной задачи конвекции-диффузии

Пусть имеется дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = p \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + Q, \quad (x, y) \in \Omega \quad (10)$$

с начальными

$$t=0: C=0$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0$$

где u, v, p - константы, $Q = Q_0 \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(t-t_0)$.

Разностная схема, полученная с использованием интегрального тождества Г.И. Марчука, имеет вид:

$$\begin{aligned}
& - \frac{\exp(S_{i+1/2j} - S_{i+1j}) p_{i+1/2j}}{h_x} h_y C_{i+1j} - \frac{\exp(S_{i-1/2j} - S_{i-1j}) p_{i-1/2j}}{h_x} h_y C_{i-1j} - \\
& - \frac{\exp(T_{ij+1/2} - T_{ij+1}) p_{ij+1/2}}{h_y} h_x C_{ij+1} - \frac{\exp(T_{ij-1/2} - T_{ij-1}) p_{ij-1/2}}{h_y} h_x C_{ij-1} + \\
& + \frac{\exp(S_{i+1/2j} - S_{ij}) p_{i+1/2j}}{h_x} h_y C_{i,j} + \frac{\exp(S_{i-1/2j} - S_{ij}) p_{i-1/2j}}{h_x} h_y C_{i,j} + \\
& + \frac{\exp(T_{ij+1/2} - T_{ij}) p_{ij+1/2}}{h_y} h_x C_{i,j} + \frac{\exp(T_{ij-1/2} - T_{ij-1}) p_{ij-1/2}}{h_y} h_x C_{i,j} = \\
& = \frac{R_{ij}^{k+1}}{\tau} - h_x h_y \frac{C_{ij}^{k+1} - C_{ij}^k}{\tau}
\end{aligned}$$

т.е. для вычисления решения на следующем временном слое решается система вида

$$-w_{ij} C_{i-j}^{k+1} - s_{ij} C_{ij-1}^{k+1} - e_{ij} C_{i+j}^{k+1} - n_{ij} C_{ij+1}^{k+1} + c_{ij} C_{ij}^{k+1} = b_{ij}$$

Полученная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации по пространственным координатам и первый по времени, устойчива, монотонная.

Тестовая задача

Пусть в задаче (10) компоненты скорости $u=1\text{м/с}$, $v=1\text{м/с}$; коэффициент диффузии $p=1\text{м}^2/\text{с}$; область исследования $Lx=100\text{м}$, $Ly=100\text{м}$; координаты точки выброса $x_0=20$, $y_0=20$; мощность выброса $Q_0=1$; момент времени $t_0=1\text{с}$.

Результаты расчетов приведены в таблице 3. Сетка 400*400 узлов. Программа обчисляет 50 секунд физического времени. Число итераций включает в себя сумму всех итераций на каждом шаге по времени.

Таблица 3 – Время работы параллельного алгоритма Булеева для тестовой задачи (10).

Число процессоров	Время работы алгоритма, сек	Число итераций	Ускорение $Sp = \frac{T_1}{T_p}$	Эффективность $Ep = \frac{Sp}{p}$
1	261,61	35157	----	----
2	161,44	54864	1,62	0,81
4	115,16	71759	2,27	0,57
5	83,94	75119	3,12	0,62
8	35,69	79416	7,33	0,91
10	22,51	82371	11,62	1,16
16	11,19	84317	23,37	1,46
20	9,25	85469	28,28	1,41
25	8,34	85025	31,37	1,25
50	8,03	85443	32,58	0,65

Из таблицы видно, что для этой задачи, как и для стационарной, наблюдается эффект КЭШ-памяти.

Заключение

В данной работе методом конечного объема получены схемы второго порядка аппроксимации для стационарного и нестационарного двумерного уравнения конвекции-диффузии. Эта цель была достигнута при использовании интегрального тождества Г. И. Марчука. При решении уравнений полученная пятиточечная система решается явным методом Булеева. Исследованы вопросы аппроксимации, сходимости и устойчивости полученных схем. Построенные схемы являются монотонными, что исключает появление нефизических решений.

Описан параллельный алгоритм метода Булеева и реализована программа на языке Fortran для решения стационарного и нестационарного уравнений конвекции-диффузии. Показаны ускорение и эффективность параллельных программ на кластере СКИФ Cyberia.

Полученный метод может применяться для численного решения задач математической физики, включающих уравнения конвекции- диффузии (в частности, для различных проблем окружающей среды).

ЛИТЕРАТУРА:

1. К.Е. Афанасьев Многопроцессорные вычислительные системы и параллельное программирование: Учебное пособие / К.Е. Афанасьев, С.В. Стуколов. – Кемеровский госуниверситет. – Кемерово: Кузбассвуиздат, 2003. – 233 с.
2. В.А. Вшивков, Г.Г. Лазарева, А.В. Снытников Параллельные численные алгоритмы. Решение задач многофазной гидродинамики и астрофизики: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2006. – 146 с.
3. Высокопроизводительные вычисления на кластерах: Учебн. пособие/ под ред. А.В. Старченко. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. – 198 с.
4. В.П. Ильин Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Из-во Ин-та математики, 2000 – 288 с.
5. В.П. Ильин Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – М.: Физматлит, 1995. – 288 с.
6. С. Патанкар Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 124 с.
7. А.А. Самарский Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552с.