

# ДВУХСЛОЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ В ВОДОЕМАХ С БОЛЬШОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ГЛУБИН

А.Л. Чикин, В.Н. Дацюк, О.В. Дацюк

Моделирование гидрофизических процессов в водоемах юга России, таких как Азовское море и Цимлянское водохранилище, имеет большое значение для экономики Южного федерального округа. Эти водоемы являются важными транспортными артериями, обладают уникальной рыбопродуктивностью, содержат большие запасы пресной воды. Любая авария на транспорте и промышленных объектах, приводящая к экологической катастрофе, такой как разливы нефтепродуктов или попадание химических веществ в водоемы, произошедшая в указанных водоемах, может оказать существенное влияние на социально-экономическую обстановку в данном регионе страны и требуют незамедлительного принятия решений по прогнозированию возможных последствий. Примером такой экологической катастрофы является гибель 13 судов в Керченском проливе во время шторма 11 ноября 2007 г. Для принятия правильного решения необходимо иметь в наличии методы, позволяющие оперативно смоделировать дальнейшее развитие экологической обстановки.

Естественным средством анализа возникающих в природе проблем являются методы, основанные на построении и изучении математических моделей природных систем.

Одним из основных этапов решения задач, связанных с моделированием гидрофизических процессов в водоемах, является расчет гидродинамических параметров течения. В данной работе предлагается оригинальная двухслойная математическая модель гидродинамики, учитывающая специфическое свойство исследуемых водоемов, такое как наличие обширных областей мелководья. Под мелководьем понимается область, в которой толщина слоя воды сопоставима с величиной перепада уровня при стонно-нагонных явлениях.

При расчете параметров течения в мелководных водоемах хорошо зарекомендовали себя уравнения мелкой воды, которые, однако, плохо описывают процессы в глубоководных областях. В то же время, использование трехмерных уравнений во всем водоеме может потребовать, по крайней мере, по вертикали использования криволинейных сеток или предварительного преобразования исходной нерегулярной области в регулярную. В предлагаемой модели [4] расчетная область разбивается на две подобласти: в первую входит все мелководье и верхний слой глубоководья, а во вторую глубоководье (рис.1). Предполагается, что эффект осушения из-за стона воды может присутствовать только в мелководных районах.

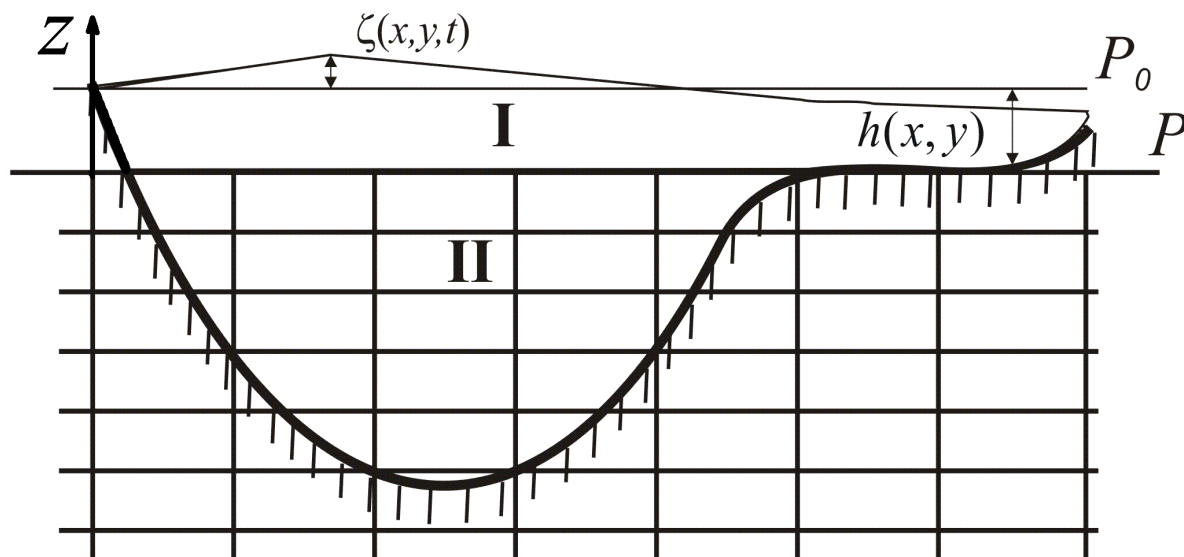


Рис. 1. Вертикальное сечение исследуемого водоема

Считается, что на движение воды в слое I влияет ветер и движение в слое II, а движение в слое II инициируется как градиентами давления, так и движением слоя I.

Систему координат выберем следующим образом. Плоскость XOY совместим с невозмущенной поверхностью водоема  $P_0$ , ось OZ направим вверх. Считаем, что верхний слой достаточно мелкий (значения возможных возмущений уровня воды и глубины слоя близки), а  $u$  и  $v$  не зависят от  $z$ .

Движение воды в верхнем слое  $\Omega_1$  описывается уравнениями мелкой воды [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial t} - \Omega v_s = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{xy} \left( \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\tau_{sx}}{H} - \frac{\tau_{bx}}{H} + F_x(x,y) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial t} + \Omega u_s = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v_{xy} \left( \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\tau_{sy}}{H} - \frac{\tau_{by}}{H} + F_y(x,y) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H u_s}{\partial x} + \frac{\partial H v_s}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3)  $u_s = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} u dz$ ,  $v_s = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} v dz$ ,  $H = h + \zeta$ ;  $h = h(x,y)$  – глубина мелководного слоя;  $u_s = u_s(x,y,t)$ ,  $v_s = v_s(x,y,t)$  – скорости в слое I; функции  $F_x(x,y)$  и  $F_y(x,y)$  описывают взаимодействие верхнего и нижнего слоев между собой;  $\tau_{sx}, \tau_{sy}$  – проекции на оси OX и OY силы трения ветра о поверхность водоема;  $\tau_{bx}, \tau_{by}$  – проекции на оси OX и OY силы трения жидкости о дно (или о глубоководный слой воды). Эти величины зависят от скорости ветра  $\bar{W}_B = \{W_x; W_y\}$  и течения  $\bar{W}_T = \{u_s; v_s\}$  и определяются так [3]:

$$\bar{\tau}_s = \gamma |\bar{W}_B| |\bar{W}_B|, \quad \bar{\tau}_b = \beta |\bar{W}_T| |\bar{W}_T|,$$

где  $|\bar{W}_B| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ ,  $|\bar{W}_T| = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$ ,  $\beta(x,y)$  – коэффициент трения верхнего слоя жидкости о дно (или о глубоководный слой);  $\gamma$  – коэффициент трения ветра о слой I.

Движение воды в нижнем слое  $\Omega 2$  описывается системой, состоящей из уравнений количества движения и уравнения неразрывности среды [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \Omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v_{xy} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \Omega u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v_{xy} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_z \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

К системе уравнений – добавляется уравнение гидростатического давления

$$p = g\rho(\zeta - z) + p_a. \quad (7)$$

В (4) – (7)  $u=u(x,y,z,t), v=v(x,y,z,t), w=w(x,y,z,t)$  – компоненты вектора скорости;  $x, y, z, t$  – пространственные переменные и время соответственно;  $\zeta=\zeta(x,y,t)$  – возмущение уровня воды;  $p_a=p_a(x,y)$  – атмосферное давление;  $\Omega$  – коэффициент Кориолиса;  $\nu_{xy}, \nu_z(z)$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной вязкости соответственно;  $\rho$  – плотность воды;  $g=9.8$  м/с<sup>2</sup> – ускорение силы тяжести.

В качестве граничных условий задаются условия прилипания  $u=0, v=0, w=0, u_s=0, v_s=0$ , а в местах втекания или вытекания воды  $\partial\Omega_r$  соответствующие значения скоростей

$$u|_{\partial\Omega_r}=u_l, v|_{\partial\Omega_r}=v_l.$$

На границе с атмосферой задается сила трения ветра о поверхность водоема, которая выносится в правую часть уравнений.

На границе между слоями  $\partial\Omega_l$  ставится условие равенства скоростей

$$u|_{\partial\Omega_l}=u_s, v|_{\partial\Omega_l}=v_s.$$

Функции  $F_x(x,y)$  и  $F_y(x,y)$ , описывающие взаимодействие I и II слоя, задаются следующим образом:

$$F_x(x,y)=\frac{uw}{H}|_{\partial\Omega_l}, F_y(x,y)=\frac{vw}{H}|_{\partial\Omega_l}.$$

В качестве начальных данных можно задавать какое-либо известное распределение скоростей

$$u=u^0, u_s=u_s^0, v=v^0, v_s=v_s^0, w=w^0, \zeta=\zeta^0$$

или считать эти скорости нулевыми.

#### Численная реализация модели.

Задача решается конечно-разностными методами. Все уравнения движения аппроксимировались неявными схемами.

Одной из задач, которая была решена с помощью разработанного программного комплекса была задача расчета гидродинамики Керченского пролива для моделирования последствий экологической катастрофы, случившейся в результате затопления 13 судов во время шторма в ноябре 2007 г. На основании рассчитанной гидродинамики были выполнены прогнозные расчеты по загрязнению прибрежной полосы вылившимся в воду нефтепродуктами. Прогнозный расчет развития ситуации в последствии полностью подтвердился наблюдавшейся в течение двух недель ситуацией.

Расчеты были выполнены на вычислительных кластерах ЮГИНФО ЮФУ.

1. IBMX- IBM Cluster 1350 состоящего из управляющего компьютера и 12 вычислительных узлов, соединенных служебной сетью Gigabit Ethernet и скоростной коммуникационной сетью DDR Infiniband. Каждый вычислительный узел представляет собой компьютер с 2-х ядерным процессором Intel Xeon 5160 с тактовой частотой 3.0 ГГц и оперативной памятью 8Гбайт. Производительность каждого вычислительного узла на тесте Linpack составляет 21 Gflops, а всего кластера в целом 252 Gflops. Среда параллельного программирования — MPI (MVARICH-0.9.9).
2. INFINI-кластера состоящего из хост-компьютера и 21-го вычислительного узла, соединенных служебной сетью Gigabit Ethernet и скоростной коммуникационной сетью SDR Infiniband. Каждый вычислительный узел представляет собой компьютер с процессором Intel Pentium 4 3.4 ГГц и оперативной памятью DDR2 2Гб. Производительность каждого вычислительного узла на тесте Linpack составляет 5.8 Gflops, а всего кластера в целом 115 Gflops. Среда параллельного программирования — MPI (MVARICH-0.9.8).
3. QUAD - рабочая станция с 4-х ядерным процессором Q6600 с тактовой частотой 2.4 ГГц и оперативной памятью 4Гбайт. Производительность вычислительного узла составляет порядка 40 Gflops. Среда параллельного программирования — MPI (MVARICH-0.9.9 и OpenMP).
4. WSD — миникластер из рабочих станций, соединенных Gigabit Ethernet, с 2-ядерными процессорами E6750 и оперативной памятью 4 Гб.

#### Эффективность численной реализации.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при дискретизации исходных дифференциальных уравнений, использовалась библиотека параллельных подпрограмм Aztec. В этой библиотеке реализован набор итерационных методов Крылова для решения систем линейных алгебраических

уравнений с разреженными матрицами. Распараллеливание выполнено с использованием коммуникационной библиотеки MPI. Особенностью итерационных методов является многократное использование операции умножения матрицы на вектор. Профилирование программы показало, что на эту процедуру приходится более 50% всех вычислительных затрат. Поэтому оптимизации параллельной версии этой подпрограммы было уделено большое внимание. Тем не менее, из-за большого числа коммуникационных операций трудно рассчитывать на высокую степень масштабируемости этой процедуры и соответственно всей программы в целом. Кроме того, использование этих методов предъявляет высокие требования к коммуникационной среде. В Таблице 1 представлено ускорение выполнения программы на различном числе узлов кластеров (INFINI, IBMX) и ядер (QUAD).

Таблица 1. Время выполнения 50 итераций на различном числе узлов

NPROCS			457.4	1	420.2	1	302.7
			INFINI				
	Время(сек.)						
	1						
12	247.2	1.85	213.8	1.96	255.2	1.18	
3	175.3	2.61	143.6	2.92	267.6	1.13	
4	136.1	3.36	109.2	3.85	275.2	1.09	
8	83.7	5.45	61.6	6.82	-	-	

Приведенные данные показывают, что при использовании технологии MPI на вычислительной системе QUAD с 4-х ядерным процессором производительность немного возрастает при подключении 2-го ядра, а затем падает при подключении последующих. В то время, как на системах с распределенной памятью INFINI и IBMX наблюдается хороший рост ускорения при увеличении числа вычислительных узлов. Очень хорошая масштабируемость на кластере IBMX лишь от части связана с высоким качеством коммуникационной сети. Значительный вклад в ускорение программы дает то обстоятельство, что при использовании большего числа узлов уменьшаются размеры массивов на каждом узле и, соответственно, увеличивается эффективность использования кэш памяти. Заметим, что на вычислительном кластере IBMX с 2-ядерным процессором на каждом узле запускался только один счетный процесс. Использование второго ядра, так же, как и на системе QUAD приводила к деградации производительности узла.

Это обстоятельство иллюстрируется Таблицей 2.

Таблица 2. Время выполнения 50 итераций на кластерах при различном сочетании узлов и ядер.

кластер			420.6 сек.	437.2 сек.	213.8
	1 x 1		сек.		
	IBMX				
224.7 сек.WSD	303.2 сек.	312.1 сек.	196.1 сек.	230.1 сек.	

Проведенное нами исследование ставит под сомнение целесообразность создания кластеров с большим числом ядер на узлах. По крайней мере, нужно отдавать себе отчет, для решения каких задач будет преимущественно использоваться вычислительная система и насколько эффективно будут выполняться программы на той или иной конфигурации вычислительных узлов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. Л.: Гидрометеиздат, 1977, 206 с.
2. Марчук Г.И., Каган Б.А. Океанские приливы (математические модели и численные эксперименты). Л.: Гидрометеиздат, 1977. 296 с.
3. Филиппов Ю.Г. Об одном способе расчета морских течений. //Тр. ГОИН, 1970, вып. 103, с.87-94.
4. Чикин А.Л. Об одном из методов расчета параметров течений в водоемах с большой неоднородностью глубин// Вод. ресурсы. 2005. Т. 32. № 1. С. 55 – 60.