АНИЗОТРОПИЯ В ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

М.Ю. Решетняк

ВВЕДЕНИЕ.

Приближение однородной и изотропной турбулентности является весьма грубым при описании конвекции во многих геофизических приложениях. Для случая без вращения отклонение от изотропии вызвано наличием выделенного направления, связанного с силой тяжести. При оценке спектров полей отклонение спектра от колмогоровсого закона $\sim k^{-5/3}$ может быть и не большим (k - волновое число), поскольку для задачи в слое форма конвективной ячейки на пороге генерации близка к кубической, а возможные отклонения от куба уменьшаются при переходе к малым масштабам. Однако, спектральные оценки не являются исчерпывающими характеристиками. Согласно модели Колмогорова мы были бы вправе ожидать изотропии и в потоках кинетической энергии в спектральном пространстве. Последнее не выполнимо для задач с подогревом снизу, хотя бы уже потому, что работа силы Архимеда по всему объему не равна нулю. Однако, к еще большей анизотропии в задачах геофизической конвекции приводит суточное вращение. Если влияние сил Кориолиса для конвекции в мантии еще пренебрежимо мало, то для задач метеорологии, физики океана их влияние оказывается принципиальным [1]. Более того, для конвекции в жидком ядре Земли сила Кориолиса превосходит нелинейный член на три порядка, в корне меняя баланс сил в уравнении Навье-Стокса и спектральные свойства его решения при больших числах Рейнольдса Re.

Введение вращения приводит к существенной перестройке течений как в физическом пространстве, так и в волновом. Несмотря на тот факт, что сама сила Кориолиса не совершает работы, за счет появления условий для обратного каскада энергии, наблюдаемого в прямых вычислениях [2] и предсказанного теорией ренорм-групп [3], амплитуда крупномасштабных течений может увеличиваться. Как следствие, наклон спектра кинетической энергии также увеличивается от -5/3 до -2 [4,5]. Данное изменение связано с блокированием передачи энергии по спектру. При переходе к задаче с тепловой конвекцией, где добавляется уравнение для температуры и сила плавучести, возникают условия для появления циклонической конвекции с интенсивными вертикальными скоростями. В физическом пространстве задача уже достаточно изучена в работах геодинамо. Быстрое вращение приводит к появлению равновесия между силой Кориолиса и градиента давления (геострофический баланс). Возникают циклоны (антициклоны), вытянутые вдоль оси вращения. Так, если взять жидкое ядро Земли и уменьшить амплитуду источников тепла до уровня начала возникновения конвекции, то диаметр d_c таких циклонов будет на 5 порядков меньше его высоты. В действительности, за счет того, что конвекция в ядре Земли турбулентна, $Re \sim 10^9$, в волновом пространстве существует целый пакет таких циклонов, но оценки по порядку величины дают, что как минимум для первых трех-четырех порядков по k геострофический баланс выполняется. Это существенно превосходит протяженность спектра геомагнитного поля и должно учитываться при построении моделей динамо.

Как уже отмечалось выше, для динамики передачи энергии в волновом пространстве появление силы Кориолиса также важно. Если для случая без вращения, нелинейный член, бывший одного порядка с градиентом давления, беспрепятственно передавал энергию по спектру (например, за счет вихревой части нелинейного члена), то при появлении силы Кориолиса возможна следующая ситуация: давление компенсирует потенциальную составляющую силы Кориолиса. Вихревая же компонента силы Кориолиса блокирует перенос энергии нелинейным членом. Как следствие, спектр становится круче. Так обстоит дело на малых масштабах $l \ll d_c$. На больших же масштабах $l \gg d_c$ система может находится в состоянии статистического равновесия: диссипация практически отсутствует, а обмен энергиями между масштабами пренебрежимо мал.

Ниже, на примере трехмерной модели тепловой конвекции в плоском слое, мы рассмотрим свойства анизотропии, вызванные вращением, как в физическом пространстве, так и в волновом для режимов, характерных для моделей конвекции в жидком ядре Земли, и сравним их с режимами без вращения.

МОДЕЛЬ.

Для описания статистических свойств тепловой турбулентности обычно используют модель Буссинеска в слое с подогревом снизу в Декартовой системе координат, см. подробнее [6]. Слой вращается вокруг вертикальной оси z. По горизонтали используются периодические граничные условия, на границах же по вертикали для температуры используются фиксированные значения, для горизонтальных скоростей — невязкие условия, а для нормальной компоненты скорости — условие непроникновения. Учитывая тот факт, что нас будет интересовать поведение системы как в физическом пространстве, так и в пространстве Фурье, удобно использовать псевдоспектральный метод [7]. Суть метода состоит в том, что интегрирование по времени уравнений в частных производных производится в волновом пространстве, удобном для операций дифференцирования. Для вычисления же нелинейных членов делается переход в физическое пространство, где производится перемножения соответствующих полей, после чего делается обратный переход в k-пространство. Интегрирование по времени осуществляется по схеме Адамса-Башфора (AB2) для всех членов, кроме

диффузионного. Для диффузионных членов используется аналитический прием [7], сводящийся к замене переменных. При аппроксимации используются физические переменные, давление исключается за счет использования взятия дивергенции от уравнения Навье-Стокса, записанного в роторной форме.

Следующим важным моментом является адаптация кода для многопроцессорной техники. В работе использован наиболее гибкий в настоящее время метод MPI, позволяющий проводить вычисления на компьютерах с различной архитектурой: как на кластерах, так и на многопроцессорных суперкомпьютерах с общей шиной (в частности, суперкомпьютерах IBM Regatta p690+). Суть распараллеливания состоит в том, что волновое и физическое пространства разбиваются между процессорами в направлениях (x-y) и далее вычисления производятся на каждом процессоре независимо с последующим обменом данными между процессорами. Отдельно стоит упомянуть параллельную версию трехмерного FFT. Для машинной независимости были использованы библиотечные одномерные FFT с открытым кодом, которые и использовалось для Фурье-преобразования в вертикальном z-направлении. Для преобразований по вертикали использовалось преобразование по косинусам или синусам в зависимости от используемых граничных условий. Для взятия преобразований в горизонтальных направлениях, предварительно, делалось межпроцессорное транспонирование массивов с использованием MPI_ALLTOALLV процедур MPI. Использование двумерной стратегии распараллеливания позволяет эффективно использовать $\sim N^2$ процессоров, где N ($=2^n$) — число точек на сетке N^3. Код написан на Фортране-95. Общий подход в проводимых тестах состоял в следующем: запишем произвольное параболическое дифференциальное уравнение так, что слева стоит производная по времени, а справа пространственный оператор. Зададимся произвольным аналитическим начальным условием, удовлетворяющим условиям на границе и требуемым свойствам для рассматриваемого поля (например, бездивергентности для поля скорости). Подставим его в оператор и вычислим в аналитическом виде, например, в пакете MAPLE. Конвертируем выражение в фортрановский (C) код и подставим в качестве источника с обратным знаком в тестируемую программу. Если программа работает правильно, то на выходе мы будем иметь стационарное решение. Если же есть ошибки, то анализ пространственной структуры возникающих возмущений во многих случаях позволяет быстро найти ошибку. Некоторые особенности, связанные с архитектурой машин Regatta p690+ для данного класса задач рассмотрены в [8].

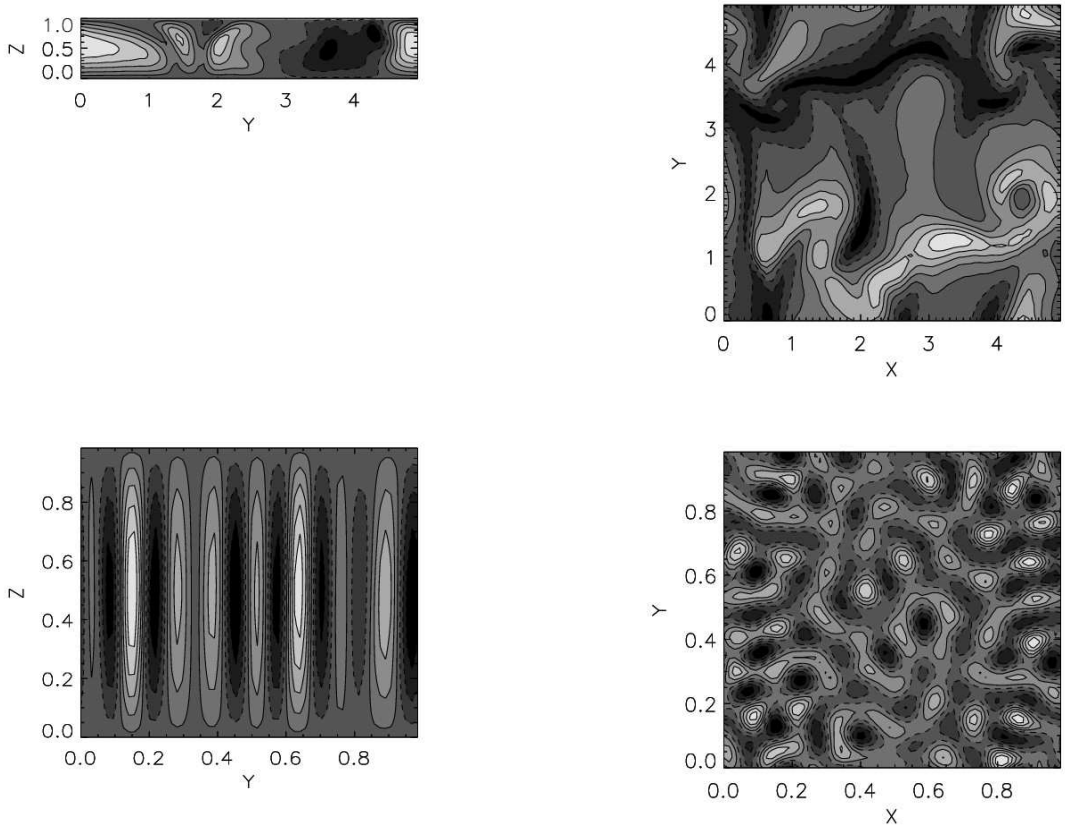

Рис.1. Сечения вертикальной компоненты скорости Vz режим без вращения NR(1,2) для x=4.3, и z=0.8. Диапазоны полей: (-257,506) и (-254, 572). На нижних двух рисунках (3,4) представлены сечения Vz с учетом вращения (режим R1) для x=4.3 и z=0.8. Диапазоны полей: (-88,127) и (-55, 86).

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Возникновение конвекции в бесконечном плоском слое является пороговым явлением, происходящее при увеличении числа Рэлея до критического значения Ra^{cr}. Рассмотрим три режима конвекции:

1. NR: Режим без вращения (сила Кориолиса равна нулю), Ra=9 10^5, Pr=1, E=1, Re~70.
2. R1: Режим с вращением, Ra=4 10^2, Pr=1, E=2 10^{-5}, Re~200.
3. R2: Режим с вращением, Ra=10^3, Pr=1, E=2 10^{-5}, Re~10^3.

Здесь Pr, E — безразмерные числа Прандтля и Экмана [1]. Первый режим, представленный на рис.1, соответствует квазипериодическому режиму тепловой конвекции без вращения. Тепловая конвекция с вращением характеризуется появлением большого числа вертикальных вращающихся колонок (циклонов-антициклонов). Их число зависит от числа Экмана kc~E-1/3, равного отношению сил вязкости к силе Кориолиса [9,10]. Для жидкого ядра Земли E~10-15, что очевидно не позволяет проводить вычисления при реалистичных значениях параметра. Обычно, удается добиться режимов с E=10-5-10-6. Целью численных экспериментов является получить асимптотический режим и провести соответствующую экстраполяцию к земным параметрам. Также, из линейного анализа известно, что критическое число Рэлея, при котором начинается конвекция, зависит от числа Экмана как Racr~E-1/3 . Увеличение Racr связано с появлением циклонической конвекции, приводящей к повышенной диссипации. Режим R1 соответствует геострофическому состоянию конвекции вблизи порога генерации, характеризуемого регулярной пространственной структурой циклонов (рис.1). Увеличение Ra (режим R2) приводит к нарушению упорядоченности циклонов, появлению мелкомасштабных течений в направлении z, отклонению от геострофии.

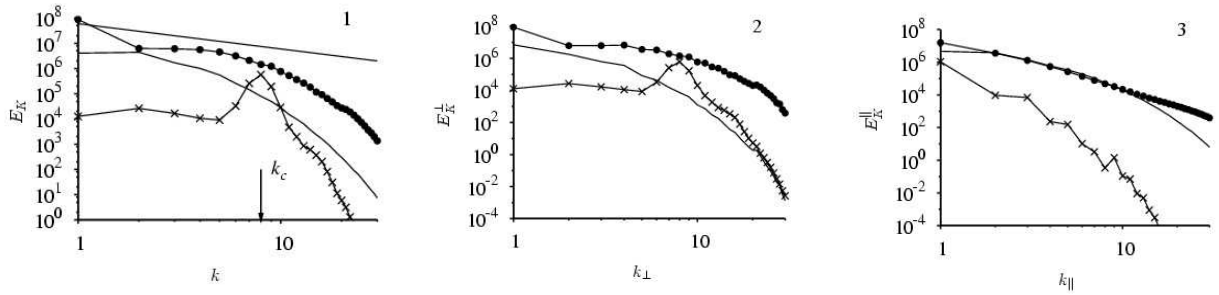

Рис.2. Спектры кинетической энергии EK, EK⊥, EK|| как функция k (1), k⊥ (2) и k|| (3) для режимов NR (сплошная линия), R1 (крестики) и R2 (кружочки). Прямая линия соответствует спектру Колмогорова ~k-5/3 .

Для режима NR спектральные свойства конвекции близки к колмогоровской зависимости ~$k^{-5/3}$ (рис.2). Режим R1 близок к пороговому. На интегральном спектре (верхний рисунок) хорошо виден пик k_c~8, соответствующий циклоническим течениям. При увеличении Ra (режим R2) провал в спектре начинает заполняться и интегральный спектр становится похожим на спектр без вращения.

Для режима R1 спектры поперечный $E_K^\perp$ и продольный $E_K^\parallel$ спектры сильно различаются: спектр $E_K^\parallel$ не чувствует границы $k=k_c$, в то время как для $k<k_c$ поведение $E_K^\perp$ близко к белому спектру, а для больших k спектр $E_K^\perp$ резко падает ($k_\perp^2=k_x^2+k_y^2$, $k_\parallel=k_z$). При переходе к большим Ra $E_K^\parallel$ приближается к колмогоровскому спектру, а трансверсальный спектр по-прежнему остается белым для малых k и близким по наклону к спектру без вращения для $k>k_c$.

Наблюдаемое сходство в поведении спектров R2 и NR еще не свидетельствует о сходстве физических процессов: известно, что в двумерной турбулентности [11] также наблюдается спектр кинетической энергии ~$k^{-5/3}$, но передача энергии происходит не от больших масштабов к меньшим, а наоборот. Приведенные оценки членов для уравнения Навье-Стокса для R2 свидетельствуют о выполнении геострофического баланса. В этой связи интересно рассмотреть потоки энергии в волновом пространстве от одних масштабов к другим, см. подробнее [12]. На рис.3 представлены потоки кинетической энергии T_K, как функции волнового числа k. Режим NR демонстрирует хорошо известную картину колмогоровского прямого каскада кинетической энергии. Для больших масштабов $T_K<0$ - эти масштабы являются источниками энергии. По мере перехода в инфракрасную часть спектра знак потока меняется на положительный: энергия потребляется. Для двумерной турбулентности наблюдается зеркально-симметричная картина для потока [11]. В этом случае вместо прямого каскада энергии наблюдается обратный каскад. Вращение существенно меняет поведение потоков энергии. Энергонесущим волновым числом является k_c. Для $k>k_c$ мы также наблюдаем прямой каскад энергии $T_K>0$. Максимум T_K смещен относительно максимума спектра вправо тембольше, чем больше Re. Для $k<k_c$ картина существенно сложнее: для небольших волновых чисел наблюдается обратный каскад энергии $T_K>0$. В тоже время, в большей части области волновых чисел $0<k<k_c$ каскад по прежнему прямой, $T_K<0$. Для оценки эффектов анизотропии представим поток T_K в виде суммы трансверсального $T_K^\perp$ и продольного $T_K^\parallel$ потоков (рис.3). Для режима NR качественно поведение потоков $T_K^\perp$ и $T_K^\parallel$ не отличается. Анализ ненормированных величин T_K свидетельствует, что при ярковыраженном состоянии геострофии (R1) потоки энергии вдоль оси z блокируются. Также из

графика видно, что при увеличении Ra исчезает минимум для $T_K^{\|}$: последнее связано с дроблением циклонов по направлению **z**. В тоже время, горизонтальный масштаб $1/k_c$ по-прежнему остается энергонесущим.

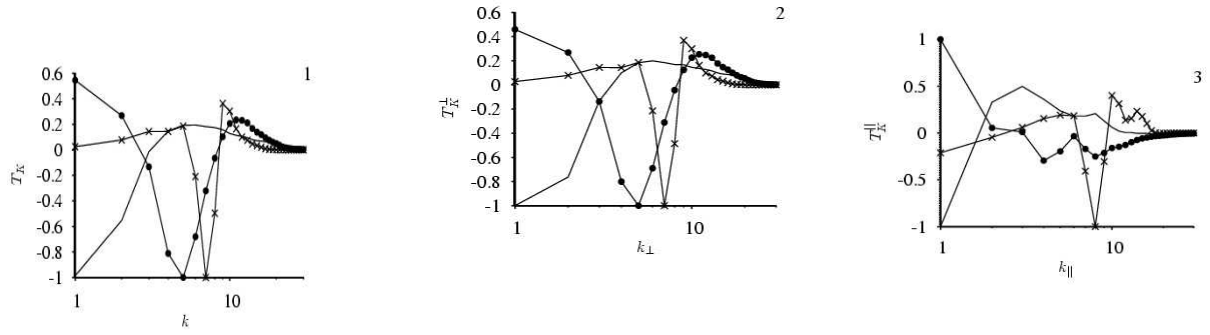

Рис.3. Потоки кинетической энергии TK как функция k (1), k⊥ (2) и k|| (3) для режимов NR (сплошная линия), R1 (крестики) и R2 (кружочки).

Перейдем к вопросу о структуре триадных взаимодействий, описывающих механизм генерации частот в нелинейных членах. Пусть существует две гармоники P=|**p**| и Q=|**q**|. Тогда результирующая гармоника K=|**k**| определяется правилом треугольника: **k**=**p**+**q**. Записывая энергетические уравнения для отдельных мод можно ввести потоки энергии идущие гармонике K от гармоник P и Q [13]: $T_3(K,P,Q)$ ($T_3(K,P,Q)=-T_3(K,Q,P)$). Интегрируя T_3 по P имеем $T_2(K,Q)$ — количество энергии переданное K от Q ($T_2(K,Q)=-T_2(Q,K)$).

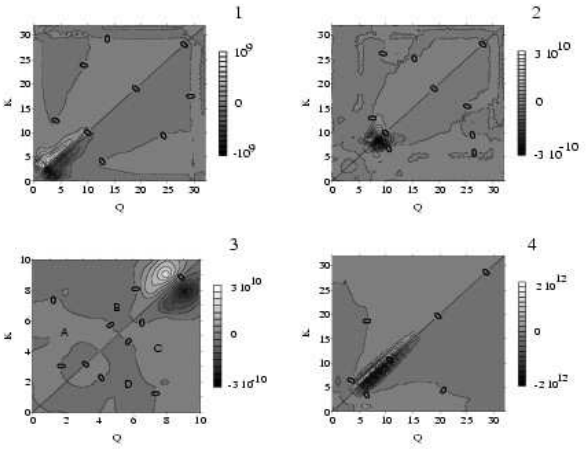

Рис.4. Потоки кинетической энергии T2(k) для режимов NR (1), R1 (2 и 3), R2 (4).

На рис.4 представлена диаграмма антисимметричных относительно диагонали K=Q потоков T_2 для рассмотренных выше режимов. В целом, картина напоминает результаты с вынужденной силой в работе [14]: гармоники с K>Q отбирают энергию у гармоник с K<Q (прямой каскад энергии). Максимум потока приходится на близкие к диагонали гармоники с K~Q, т.е. присутствует локальный перенос энергии. Обратим внимание на существование областей (например, Q=5, K=20), для которых наблюдается и нелокальный обратный каскад энергии, интегрально же, картина близка к идеализированному колмогоровскому сценарию. Удобно представить диаграмму, приведенную на рис.4, в виде интеграла по Q и K, как функцию K-Q, см., рис.5.

Рисунок отчетливо демонстрирует наличие прямого каскада, а также локального взаимодействия и локального переноса энергии. Вращение меняет поведение T_2 для $k<k_c$, оставляя ее практически без изменения для высокочастотной области $k>k_c$. Рассмотрим появившиеся изменения более подробно. Положение абсолютных максимумов (минимумов) приходится на область, близкую к k_c, т.е. энергия передается в область больших k от лидирующей моды. С другой стороны, для $k<k_c$ наблюдается резкое уменьшение потока энергии, что соответствует приближению системы к статистическому равновесию. В увеличенном варианте (см. рис.4(3)) наблюдается более тонкая структура для малых k: область A с прямым каскадом энергии, но с равновероятным переносом энергии, как от малых Q~K, так и от сравнительно больших Q~4K. Область B с обратным каскадом энергии (и также, как и у области A, небольшой амплитудой потока энергии порядка 1/10 от абсолютного максимума) имеет протяженную полосообразную форму от Q~ K до Q~10K. На рис.5 это соответствует появлению небольшого отрицательного минимума для K>Q.

Увеличение Ra (режим R2) приводит к смещению области с обратным каскадом энергии в направлении малых Q и K>Q. Как и прежде, можно говорить о существовании состояния, близкого к равнораспределению для $k<k_c$. Данный режим также характеризуется более длинным интервалом в области $k>k_c$ с локальным

переносом энергии и прямым каскадом. Относительный вклад области с обратным каскадом становится меньше, см. рис.5(3). В тоже время, этот вклад переносится на крупномасштабную область $k \ll k_c$, что может быть интересно для задач геодинамо, в которых $k_c \sim 10^5$ и область генерация магнитного поля (при современных оценках магнитного числа Рейнольдса $Rm \sim 10^2$-10^3 область генерации магнитного поля лежит в диапазоне $k \sim 1$-10^3 разнесены как минимум на несколько порядков.

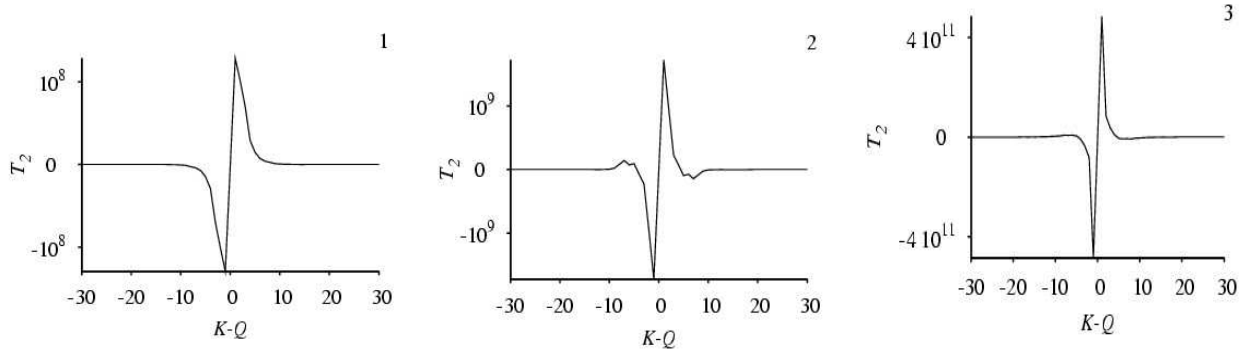

Рис.5. Потоки кинетической энергии T_2(K-Q) для режимов NR (1), R1 (2), R2 (3).

Остановимся подробнее на свойствах функции T_3 для рассмотренных выше режимов. Случай без вращения рис.4(1,2) демонстрирует крайне интересный результат: наибольший вклад в поток энергии, приходящийся на гармонику K приходится от двух источников: волн с $P \leq K$, $Q \ll P$ и $Q \leq K$, $P \ll Q$. Другими словами, волновой треугольник является равнобедренным с небольшим углом между равными сторонами (K,P) или (K,Q). Учитывая тот факт, что согласно рис.5 энергия передается K от близлежащего меньшего волнового числа, можно придти к выводу, что третий, малый по амплитуде вектор является катализатором. Участвуя в обменном процессе, эта высокочастотная гармоника сама энергию волне K не дает. Полученный результат не укладывается в классическое представление теории Колмогорова, согласно которой волновой треугольник должен быть равносторонний, т.е. не только перенос энергии является локальным, но и само триадное взаимодействие отвечает этому свойству. Это вызвано двумя причинами. Во-первых, учитывая результаты работы [14], мы связываем это с недостаточной длиной рассматриваемого спектра. Поскольку для используемого разрешения для режима NR мы имеем лишь несколько вертикальных плюмов. С другой стороны, с существованием самих плюмов, и как следствие анизотропией системы. В этой связи известно, что даже при существенно больших числах Рейнольдса в задачах с вынужденной силой, анизотропия течения на малых масштабах оказывается существенной [15]. Наше моделирование свидетельствует, что существует высокая корреляция потоков энергии на малых масштабах с масштабом силы плавучести на большом масштабе. Обратимся к случаю с вращением. Структура триад для небольших Ra сильно отличается от режима без вращения. Одна и та же гармоника взаимодействует с целым волновым пакетом: диаграмма имеет крестообразное строение. Последнее возможно за счет увеличения угла между векторами **p** и **q**. Хорошо прослеживается обратный каскад энергии для небольших K, см. рис.4: гармоника с K=7 получает энергию от волновых чисел с большими номерами, отдавая ее в коротковолновую часть спектра. По мере увеличения K мы снова приближаемся в состояние, когда $P \sim Q$. Но в отличие от случая без вращения, энергия приходящаяся на волну K, передается от волн с $P \sim Q \sim 0.7$ K. Увеличение Ra приводит систему в режим промежуточный между рассмотренными выше.

ЛИТЕРАТУРА:

1. J. Pedlosky Geophysical Fluid Dynamics. NY: Springer-Verlag. 1987. 720p.
2. M. Hossain Reduction in the dimensionality of turbulence due to a strong rotation // Phys. Fluids. 1994. V.6, N.4. P.1077-1080.
3. W.D. McComb. The physics of fluid turbulence. Oxford: Clarendon Press. 1992. 595p.
4. Y. Zhou. A phenomenological treatment of rotating turbulence // Phys. Fluids. 1995. V.7. N8. P.2092-2094.
5. P. Constantin. Energy spectrum of quasigeostrophic turbulence // Phys. Rev. Lett. 2002. V.89. N.18. P.184501-1-184501-4.
6. F. Cattaneo, T. Emonet, N. Weis. On the interaction between convection and magnetic fields // ApJ. 2003. V.588. P.1183-1198.
7. C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang. Spectral methods in Fluids Dynamics. NY.: Springer-Verlag, 1988. 567p.
8. M. Reshetnyak, B. Steffen. Pseudo-Spectral Modeling in Geodynamo // Advances in Parallel Computing. 2008. V.15. P.491-498.
9. S. Chandrasekhar. Hydrodynamics and hydromagnetic stability. NY.: Dover Publications. Inc. 1981. 654p.
10. F.H. Busse Thermal instabilities in rapidly rotating systems // J. Fluid Mech. 1970. V.44. P.441-460.
11. R.H. Kraichnan, D. Montgomery. Two-dimensional turbulence // Rep. Prog. Phys. 1980. V.43. P.547-619.

12. M. Reshetnyak, P. Hejda. Direct and inverse cascades in the geodynamo // Nonlin. Proc. Geophys. 2008. V.15. P.873-880.
13. A. Alexakis,P.D. Mininni, A. Pouquet. Shell to shell energy transfer in MHD. I. Steady state turbulence // Phys. Rev. 2005. V. E 72. P.046301-046309.
14. A. Alexakis,P.D. Mininni, A. Pouquet. Turbulent cascades, transfer, and scale interactions in magnetohydrodynamics // New Journal of Pysics. 2007. V.298. N.9. P.1-20.
15. Y. Zhou, P.K. Yeung. Scale disparity and spectral transfer in anisotropic numerical turbulence // Phys. Rev. 1996. V. E 53. P.1261-1264.