

ПОСТРОЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГРАВИТАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Б.П. Рыбакин, Н.И. Шидер

В работе предложены две разностные схемы для решения двух и трехмерных уравнений гравитационной газовой динамики. Эти схемы основаны на известных схемах типа TVD (Total Variation Diminution). Нелинейные схемы второго порядка точности с ограничением общей вариации позволяют проводить, с большим разрешением, расчеты ударных волн и предотвращать нефизические осцилляции за их фронтом. Первая разностная схема основана на методе предиктор – корректор и является модификацией схемы Nessyahu и Tadmor [1]. Вторая схема также использует идеи метода TVD и позволяет проводить газодинамические расчеты в 2d и 3d случаях [2-4].

В работе представлены результаты тестовых расчетов взаимодействия ударных волн с областями газа пониженной плотности, процесс образования ударных волн и вихрей и моделирование процесса самогравитации газового облака. Проведенное тестирование показало, что предложенные схемы и компьютерные программы позволяют, с достаточной точностью, решать газодинамические задачи, представляющие практический интерес. Тестирование разностных схем и программ осуществлялось с помощью задач о распаде произвольного разрыва Сода и Лакса. Кроме того, тестирование программ проводилось на задаче о точечном взрыве Седова – Тейлора [4-6]. Полученные результаты показали хорошее совпадение с аналитическими решениями. Все задачи решались на декартовой сетке, не инвариантной относительно вращения. Несмотря на это, анизотропный разброс всех величин мал. Отметим, что численное решение задачи Седова-Тейлора имеет сферически симметричную форму. Разрешение фронта ударной волны равно размеру двух-трех пространственных ячеек. Таким образом, проведенное тестирование предложенных схем и программ двух и трехмерного моделирования гидродинамических течений показывает, что схемы можно применять для решения задач нестационарной газовой динамики, астрофизики и т.д.

Постановка задачи. Большой практический интерес представляет собой задача взаимодействия ударной волны с цилиндрической или сферической полостями, заполненными газом с пониженной плотностью. С другой стороны, такие примеры являются хорошими тестовыми задачами для проверки различных методов и программ. С практической точки зрения, эта задача позволяет изучить процесс образования вихрей при контактном взаимодействии нескольких газов с различными уравнениями состояния [2]. Систему уравнений газовой динамики, записанную в консервативной форме можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(\rho v_i) &= 0, \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j + P \delta_{ij}) &= 0, \quad (1) \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[(e + P)v_i] &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение состояния использовалось в виде: $e = 1/2 \rho v^2 + \varepsilon$. В приведенных выше уравнениях ρ – плотность, v – скорость, P – давление, ε – удельная внутренняя энергия, e – полная энергия.

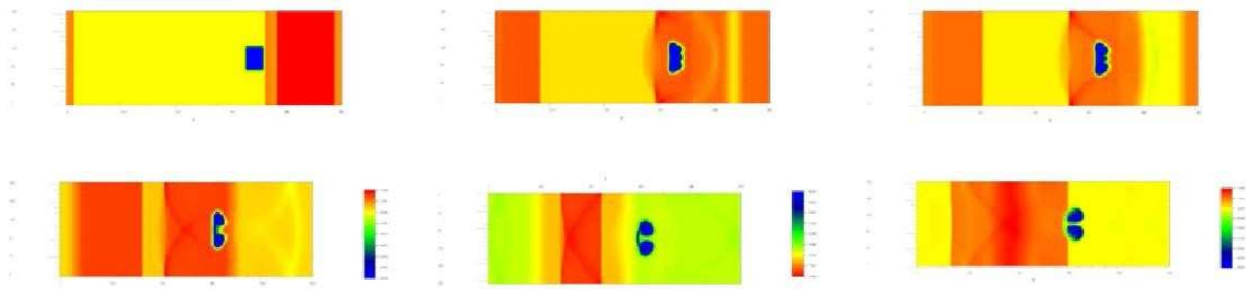


Рис. 1. В верхнем ряду приведены изоденсы в моменты времени $t=0.12$, $t=2.335$, $t=6.586$, в нижнем - в моменты времени $t=10.02$, $t=14.058$, $t=18.988$.

Рассмотрим прямоугольную область $R: \{-1.0 \leq x \leq 1.0, -0.5 \leq y \leq 0.5\}$, заполненную покоящимся газом. Плотность $\rho_0 = 1.0$ и давление $p_0 = 1.0$ одинаковы во всей области. В точке $x=0.5, y=0$ размещается область размером $a=0.25$, заполненная газом с плотностью $\rho = 1/29$ и давлением $p = 1.0$. В области $\{x > 3/4, -0.5 \leq y \leq 0.5\}$ задается ударная волна с параметрами: $(\rho, p, u, v)^T = (2/3, 4/3, -707/2000, 0)^T$. Ударная волна, которая движется влево, начинает взаимодействовать с областью газа пониженной плотности. Результаты расчетов приведены на Рис.1. Отметим формирование симметричного вихря на последних рисунках. Приведенные результаты

демонстрируют надёжность и устойчивость предложенной схемы для решения гиперболических законов сохранения.

Более сложной задачей является исследование взаимодействия пространственной ударной волны с областями газа пониженной плотности в трехмерной постановке. Пусть область $R: \{0 \leq x \leq 1.0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, представляет собой параллелепипед, заполненный покоящимся газом с плотностью $\rho_0 = 1.0$ и давлением $p_0 = 1.0$ [2]. В этой области находятся два взаимно перпендикулярных цилиндра одинакового радиуса $r=0.2$. Первый цилиндр расположен вдоль оси z , симметрично относительно осей $x=y=0$. Давление в этом цилиндре $p=10.0$, а плотность газа $\rho=1.0$. Другой цилиндр параллелен оси y с симметрией по осям $x=0.4$ и $z=0$ (Рис. 2-3). Давление в этом цилиндре $p=1.0$, а плотность $\rho=0.1$.

В результате взаимодействия газов с такими начальными условиями возникает система ударных волн, контактных поверхностей и волн разряжения. На Рис. 2-3 приведены результаты расчетов. Уровни равной плотности на рисунках обозначены каждая своим цветом. Отметим отсутствие осцилляций за фронтами волн и хорошее разрешение всех особенностей течения.

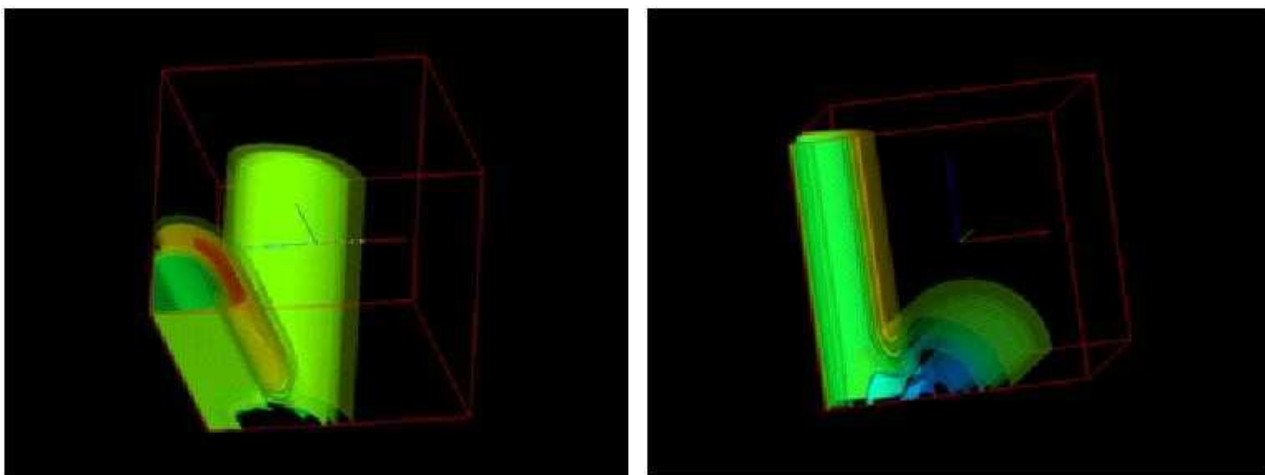


Рис. 2. Взаимодействие ударной волны с областью низкой плотности в моменты времени $t=0.251$ и $t=0.507$.

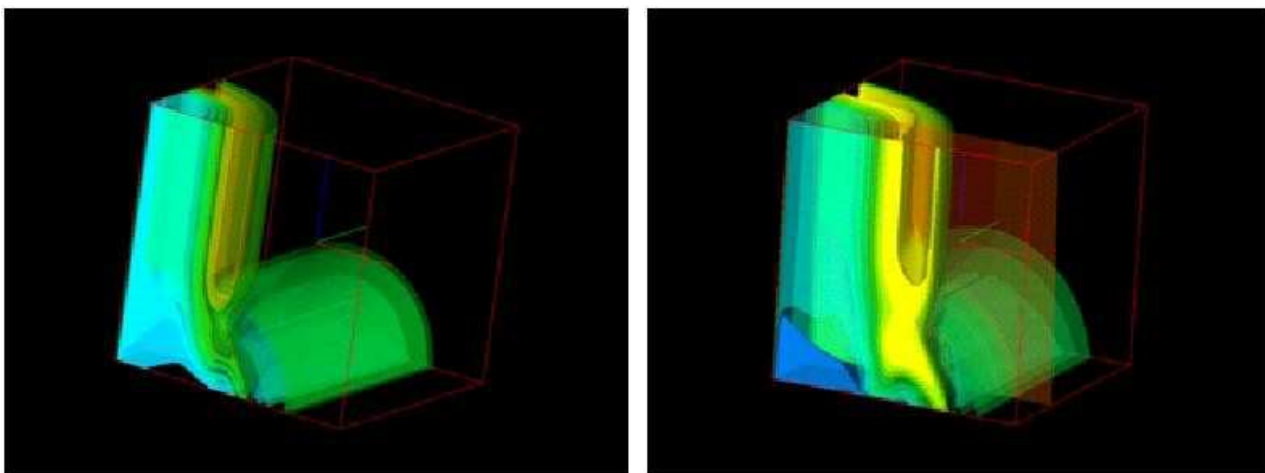


Рис. 3. Взаимодействие ударной волны с областью низкой плотности в моменты времени $t=1.051$ и $t=1.507$.

Коллапс астрофизических объектов имеет место в начальной и конечной стадиях эволюции звезд. В последнее время он является наиболее активно изучаемым явлением, что вызвано появлением большого количества новых наблюдательных данных. Сложность таких задач часто препятствует аналитическим исследованиям, поэтому практически единственной возможностью остается компьютерное моделирование процессов коллапса, с учетом наблюдаемых и измеренных экспериментально данных [7-9]. При этом приходится учитывать очень большие градиенты исследуемых величин, возникающие на фронтах ударных волн, контактных разрывов и т.д. Присутствие вращения в моделях коллапсирующих звезд приводит к необходимости использовать трехмерные модели - либо осесимметричные, либо полные трехмерные модели. Наилучшая аппроксимация для трехмерных уравнений гидродинамики осуществляется в прямоугольной декартовой системе координат с кубическими ячейками. Для выделения и более точного разрешения фронтов ударных волн, контактных поверхностей в программе используется метод адаптивных сеток [3]. Большое

количество интересных и важных задач, которые существуют в астрофизике, исследованиях Солнца и т. д. можно описать системой уравнений газовой динамики и уравнением гравитационного потенциала. Систему уравнений газовой динамики с учетом сил гравитации можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} (\rho v_i) &= 0, \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j + P \delta_{ij}) &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (2) \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(e + P)v_i] &= -\rho v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

В этих уравнениях значение гравитационного потенциала определяется из уравнения Пуассона:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho.$$

Для повышения точности численных расчетов и улучшения эффективности алгоритмов, в последнее время используют методы адаптивных сеток (AMR). Такие подходы позволяют в десятки раз сокращать затраты компьютерного времени и объем используемой памяти. Эти методы особенно эффективны в задачах газовой динамики, где возникают скачки уплотнения, ударные волны и контактные разрывы. Применение адаптивных сеток позволяет исследовать процессы с желаемой степенью точности в областях со сложной геометрией или большими градиентами. Метод AMR позволяет уменьшить общее число ячеек и, соответственно, общее время расчета. Технология AMR основана на использовании иерархической структуры ячеек. При этом, каждому уровню иерархии соответствует свой уровень пространственного и временного разрешения. Особенностью такой организации является возможность локально, динамическим образом добавлять ячейки в сетку в данном месте расчетной области. Был предложен алгоритм разбиения расчетной сетки на несколько подуровней с последовательно уменьшаемыми шагами по пространству.

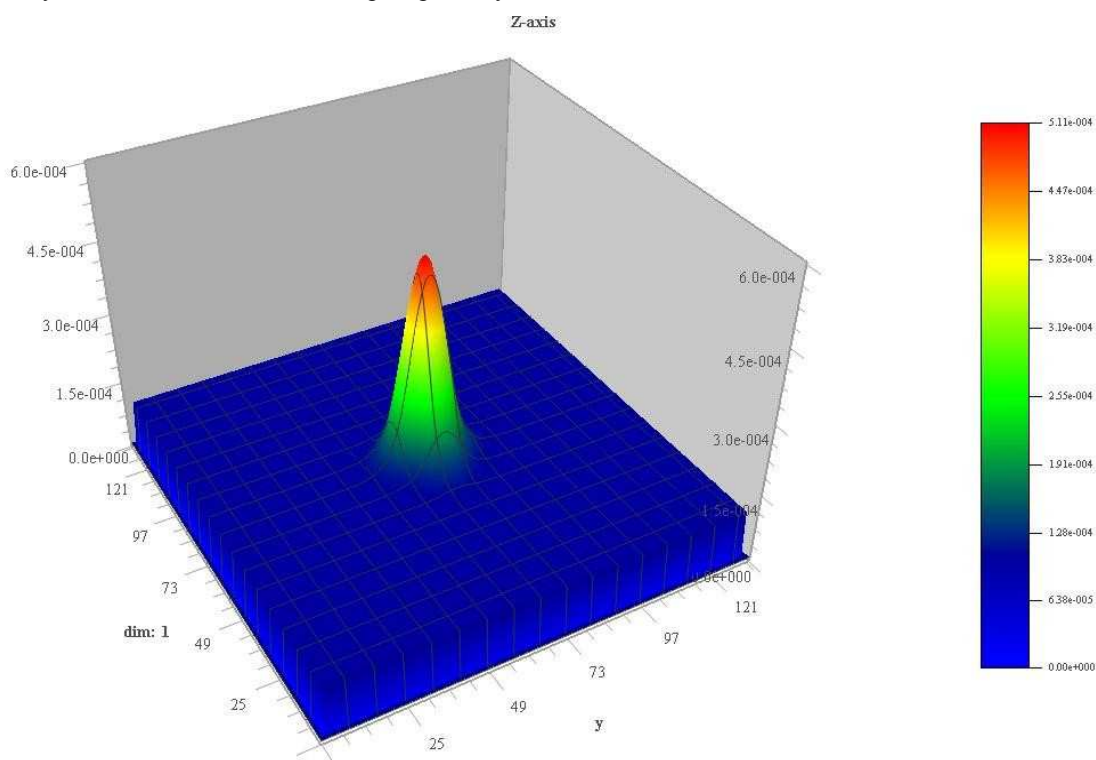


Рис. 4. Поле плотности в самогравитирующем газовом облаке.

Рассмотрим задачу эволюции самогравитирующей газовой среды. На внешней границе выполняется условие межзвездной среды. В начальный момент времени газовая среда неподвижна и однородна. Плотность, давление, удельная внутренняя энергия в безразмерном виде равны [10]: $\rho=1$, $p=1$, $e=2.5$, показатель адиабаты $\gamma=1.4$. Такое соотношение соответствует двухатомному газу — молекулярному водороду. Дальнейшие процессы, происходящие в этой системе, являются балансом двух сил — гравитации и давления. На Рис. 4 и 5 приведены графики плотности и скорости к моменту времени $t=t^*$. Поле плотности отражает процесс формирования центральной области самогравитирующегося газового облака. На внешней границе расчетной области значение плотности с течением времени уменьшается. Графики скорости вблизи центрального тела показывают образование вихревых структур, которые обладают определенной упорядоченностью.

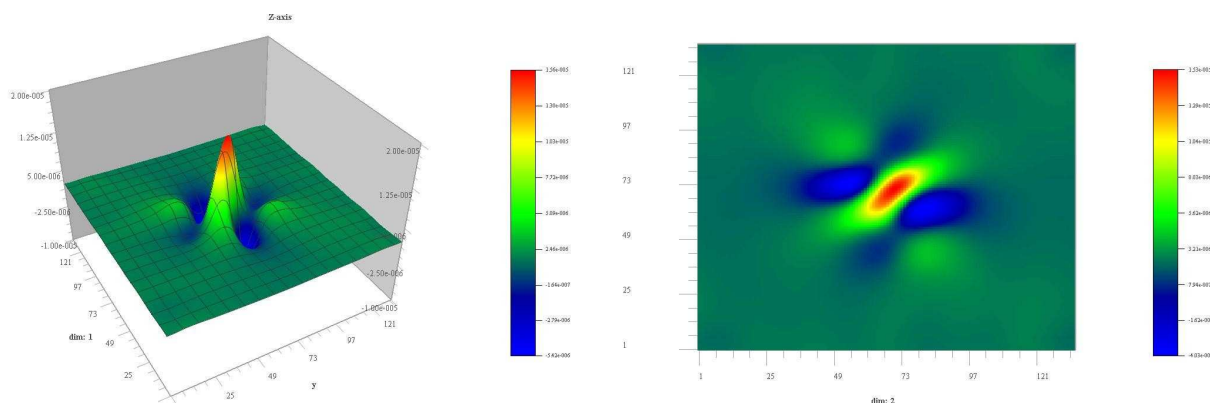


Рис. 5. Графики скорости в облаке самогравитирующего газа.

Расчеты проводились на 8 ядрах кластерного узла и на 48 ядерном кластере. Распараллеливание осуществлялось с использованием технологий OpenMP и MPI. Проведенные расчеты показали достаточно равномерную загрузку кластера и хорошую степень распараллеливания данной задачи. Основная проблема - распределение подмножеств сетки между процессорами с необходимым перекрытием. Параллельный алгоритм для задач гравитационной газовой динамики позволил использовать более точные сетки для проведения расчетов и соответственно решать более широкий круг проблем.

Решение гидродинамических задач практически невозможно без подробной графической визуализации полученных результатов. Это особенно справедливо для трехмерных течений. В данной работе графическая визуализация результатов компьютерного моделирования осуществлялась с помощью программы HDVIS [11], любезно предоставленной В.Д. Горячевым, за что автор выражает ему глубокую признательность.

Выводы. В данной работе представлены разностные схемы и программы для решения многомерных уравнений газовой динамики. Проведенное тестирование показало, что предложенные схемы и программы позволяют решать сложные газодинамические течения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. H. Nessyahu, E. Tadmor. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 87 (1990), pp. 408-463.
2. J. O. Langseth, R. J. LeVeque. A Wave Propagation Method for Three-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 165, 126–166 (2000).
3. Компьютерное моделирование гидродинамических задач на многопроцессорных ЭВМ задач на многопроцессорных ЭВМ. Международная конференция «Научный сервис в сети INTERNET. Технологии параллельного программирования», Абрау-Дюрсо, сентябрь 21-26, 2009 г. 422-425 стр.
4. B. Rybakin, N. Shider. Computer modeling of multidimensional problems of gravitational gas dynamics on multiprocessor computers. *Computer Science Journal of Moldova (CSJM)*. vol.17, no.1(49), 2009. pp. 3-13.
5. Б.П. Рыбакин. Параллельная трехмерная TVD схема для решения задач гравитационной газовой динамики. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ (ПАВТ'2009) г. Нижний Новгород, 30 марта– 3 апреля 2009 г., стр.673-679.
6. Б.П. Рыбакин. Численные методы для решения задач на многопроцессорных ЭВМ. Кишинев, 2008 г. 338 стр.
7. Ardeljan, N.V., Bisnovaty-Kogan, G.S., Kosmachevskii, K.V., Moiseenko, S.G.: An implicit Lagrangian code for the treatment of nonstationary problems in rotating astrophysical bodies. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* 115, 573–594 (1996)
8. Bisikalo, D.V., Boyarchuk, A.A., Kaygorodov, P.V., Kuznetsov, O.A., Matsuda, T.: The Structure of Cool Accretion Disc in Semidetached Binaries. *Astron. Rep.* 81, 494–502 (2004)
9. Bisnovaty-Kogan G.S., Moiseenko S.G., Rybakin B.P., Secieru G.V. Modeling of explosive magnetorotational phenomena: from 2D to 3D. *Buletinul ACM, Matematica*, N.2(42), 2007, pp. 113-122.
10. А.В. Алиев, Г.А. Тарнавский. Иерархический SPH-метод для математического моделирования в гравитационной газовой динамике. *Сибирские Электронные Математические Известия*. Т.4, стр 376-434, (2007)
11. Горячев В.Д., Смирнов Е.М., Балашов М.Е. Визуализация результатов численного эксперимента при моделировании нестационарных течений с большим объемом данных в системе HDVIS // Научный сервис в сети Интернет: решение больших задач: Труды Всероссийской научной конференции (22-27 сентября 2008 г., г. Новороссийск). Изд-во МГУ, Москва 2008, С.55-59.