

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОДЫ В ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ ТОМОГРАФИИ

С.Ю. Романов

1. Введение.

В настоящее время томографические исследования (X-RAY, MRT) являются неотъемлемой частью большинства медицинских исследований. Трехмерные задачи интерпретации данных сводятся в этом случае к решению набора независимых двумерных линейных задач, которые с успехом решаются на персональной ЭВМ.

Значительно более скромные результаты в ультразвуковых, акустических, сейсмических исследованиях связаны с тем, что даже в простейших моделях обратные задачи интерпретации данных приводят к сложным нелинейным задачам. Волновая природа излучения порождает трехмерные нелинейные задачи, которые невозможно представить как набор двумерных задач.

Математическим проблемам решения коэффициентных обратных задач для волнового уравнения посвящено большое количество публикаций. Первые работы в этой области были опубликованы еще в 70-80-х годах [1]. Классические проблемы, задачи в дифференциальной постановке исследованы в работах [2-4]. Обратные коэффициентные задачи в интегральных представлениях функции Грина рассмотрены в публикациях [5-9].

Целью настоящей работы является оценка возможности решения обратных коэффициентных задач для волнового уравнения на современных суперЭВМ. В статье оцениваются возможности приближенных методов решения обратной коэффициентной задачи для волнового уравнения в рамках дифференциального и интегрального подходов.

2. Математическая постановка коэффициентных обратных задач для волнового уравнения.

Рассмотрим волновое уравнение, которое в скалярном приближении описывает акустическое или электромагнитное поле $u(r;t)$

$$c^{-2}(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = \delta(r-q) \cdot f(t)$$

1

$$u(r, t=0) = u_t(r, t=0) = 0,$$

где $c(r)$ - обычно является скоростью волны в среде, r - положение точки в пространстве, оператор Лапласа берется по переменной r , источник располагается в точке q , генерируемый источником импульс описывается функцией $f(t)$. Будем предполагать, что неоднородность среды вызвана только изменениями скорости, а вне области неоднородности, для простоты, скорость $c(r)=const$ известна.

Будем предполагать, что поле $u(r;t)$ измеряется в области P , т.е. приемники излучения пробегают область P . Точечные источники излучения пробегают область Q , неоднородность расположена в ограниченной области R .

В обратной задаче неизвестными считаются скорость среды $c(r)$ и поле $u(r;t)$. Известными считаются значения функции $u(r;t)$ в области P расположения приемников. Требуется по этим измерениям восстановить неоднородность среды $c(r)$. В описанной выше постановке для диагностики используют импульсные источники. Взяв Фурье преобразование по времени от левой и правой части уравнения (1), задачу можно свести к уравнению Гельмгольца.

3. Методы решения, основанные на интегральных представлениях.

Рассмотрим задачу, когда источник является точечным гармоническим осциллятором. В этом случае задача может быть описана уравнением Гельмгольца

$$\Delta u(r, q, w) + \frac{w^2}{c^2(r)} u(r, q, w) = f(r, q, w)$$

2

Здесь оператор Лапласа берется по переменной r . Это уравнение в скалярном приближении описывает акустическое или электромагнитное поле $u(r;q,w)$, генерируемое источником, описываемым функцией $f(r;q,w)$, w - круговая частота источника излучения. Неоднородность среды вызвана только изменениями фазовой скорости $c(r)$. Вне области неоднородности $c(r)=const$ - известна.

Используя функцию Грина, раздельно записываем уравнения для областей R и P , получаем нелинейную систему уравнений [5,6]

$$F(X)=0, \tag{3}$$

где

$$F(X)=\begin{cases} u(r,q,w)-u_0(r,q,w)-\omega^2 \int_R G(r',r,w)z(r')u(r',q,w)dr' \\ w^2 \int_R G(r',p,w)z(r')u(r',q,w)dr' - U(p,q,w) \end{cases} \tag{4}$$

Здесь введен в рассмотрение вектор $X=(z,u)$, $z(r)$ - зависит от фазовой скорости, $U(p,q,w)$ - известна из измерений, $G(r;p,w)$ - функция Грина. В обратной задаче неизвестными считаются свойства среды $z(r)$ и поле $u(r;q,w)$. Известной является функция $U(p,q,w)$, полученная в результате измерений в области расположения приемников. Требуется по этим измерениям восстановить неоднородность среды $z(r)$.

Уравнение (3) является нелинейным уравнением первого рода и может быть решено итеративно-регуляризованным методом Гаусса – Ньютона [5, 6]

$$X_{p+1} = X_p - (F_p'^* F_p' + a_p E)^{-1} (F_p'^* F(X_p) + a_p (X_p - y)), \tag{5}$$

где $F' = F'(X)$ - производная Фреше для (4), F'^* - оператор сопряженный F' , p - номер итерации. a и y параметры регуляризации [5]. Формулы для F' и $F'^* F'$ могут быть явно выписаны (см. [7, 8]).

Рассматриваемая обратная задача с вычислительной точки зрения является очень трудоемкой. Наиболее вычислительно трудоемкой операцией в рассматриваемой процедуре Гаусса – Ньютона (5) является вычисление матрицы $F'^* F'$ и обращение оператора $F'^* F' + aE$ на каждой итерации процедуры Гаусса – Ньютона. Для вычисления матрицы необходимо выполнить порядка n в 10 степени операций типа сложения-умножения, где n - число точек в одном направлении трехмерной сетки. Для обращения оператора итерационными методами необходимо выполнить на каждом шаге итераций порядка n в 7 степени операций (количество итераций составляет, как правило, несколько сотен) [7, 8].

Рассмотренный выше алгоритм приводит к вычислению вектора $X=(z,u)$. В реальности нас интересует только компонента z , описывающая неоднородность. Эту особенность задачи можно использовать следующим образом. Нелинейную систему уравнений (3) запишем в виде

$$\text{Пусть обратные опер уравнение для } \begin{cases} F(u, z) = 0 \\ H(u, z) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

7

где $g(z)$ определяет непрерывное отображение $u=g(z)$.
Заметим, что

$$H' = \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \left(-\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^{-1} \right) + \frac{\partial H}{\partial z}$$

и, следовательно, итерации Ньютона-Гаусса для уравнения (7) будут иметь вид

$$z_{p+1} = z_p - (H_p'^* H_p' + a_p E)^{-1} (H_p'^* H_p(g(z_p), z_p) + a_p (z_p - y)). \tag{8}$$

Здесь a и y параметры регуляризации.

Итерационный процесс (8) с вычислительной точки зрения также является трудоемким. Для обращения оператора итерационными методами необходимо выполнить на каждом шаге итераций порядка n в 6 степени операций, что несколько меньше, чем для процесса (5). Однако для вычисления матрицы необходимо выполнить по-прежнему порядка n в 10 степени операций типа сложения-умножения.

4. Методы решения, основанные на дифференциальных представлениях.

Рассмотрим задачу, описываемую волновым уравнением в трехмерной области, ограниченной поверхностью S в течение времени $[0, T]$ с точечным источником, располагающимся в точке ro

$$c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = \delta(r - r_0) \cdot f(t)$$

$$u(r, t = 0) = u_t(r, t = 0) = 0$$

9

$$\partial_n u|_{ST} = p(r, t).$$

Здесь берется производная вдоль нормали к поверхности S в области $S \times T$. Обратная задача состоит в нахождении функции $c(r)$, описывающую неоднородность, по экспериментальным данным измерения волны $U(s, t)$ на границе S области за время $[0, T]$ при различных положениях r_0 источника.

Как известно, задача (9) задает $u(r; t)$ как неявную функцию от $c(r)$. Поставим обратную задачу как задачу минимизации квадратичного функционала

$$\Phi(u(c), c) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_S (u(s, t) - U(s, t))^2 ds dt. \quad (10)$$

Здесь $U(s, t)$ - экспериментальные данные измерения волны на границе S области за время $[0, T]$. Проведя необходимые выкладки, для градиента функционала $\Phi(u(c), c)$ получим [3]

$$\Phi'_c(u(c), c) = \int_0^T w_t(r, t) u_t(r, t) dt. \quad (11)$$

Здесь $u(r; t)$ - есть решение основной задачи (9), а $w(r; t)$ - есть решение сопряженной задачи. Таким образом, для вычисления градиента функционала необходимо решить основную и сопряженную задачи.

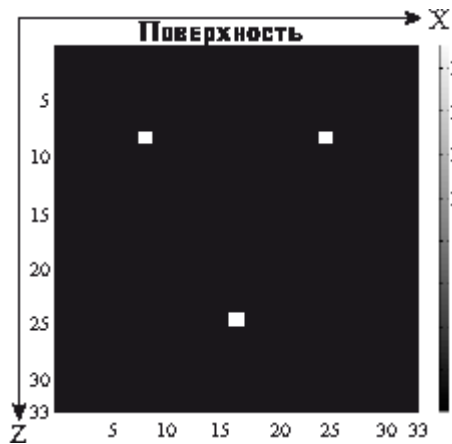
Зная Φ' из (11), можно построить различные итеративные схемы для минимизации функционала невязки (10).

Рассмотренный дифференциальный подход имеет ряд существенных преимуществ и, прежде всего, в объемах вычислений. Использование, например, явных схем для нахождения $u(r; t)$ и $w(r; t)$ приводит к необходимости выполнить порядка n в 4 степени операций типа сложения-умножения для вычисления градиента. Полученная оценка для числа операций значительно меньше, чем в интегральном подходе.

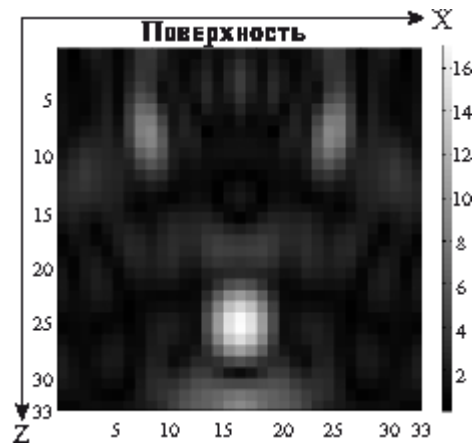
5. Математическое моделирование.

Численные эксперименты были проведены на суперкомпьютере СКИФ МГУ-«Чебышев». При решении обратной задачи интегральным методом в область расчетов R была введена сетка $33 \times 33 \times 33$ точек. Время расчета на 512 процессорах составило около 10 ч.

На Рис. 1 а приведено изображение амплитуды исходных данных в вертикальном сечении, проходящем через объекты. На Рис. 1 б восстановленное изображение.



a



b

Рис. 1 Исходное и восстановленное изображение трех объектов. Сечение в вертикальной плоскости

Оценки показывают, что использование аналогичных вычислительных мощностей для решения обратной задачи в дифференциальной постановке позволят использовать сетки размером до нескольких сот точек в одном направлении. Как видно из Рис.2 а, б, использование больших сеток и увеличение числа положений источников и приемников позволяет существенно улучшить качество реконструкции.

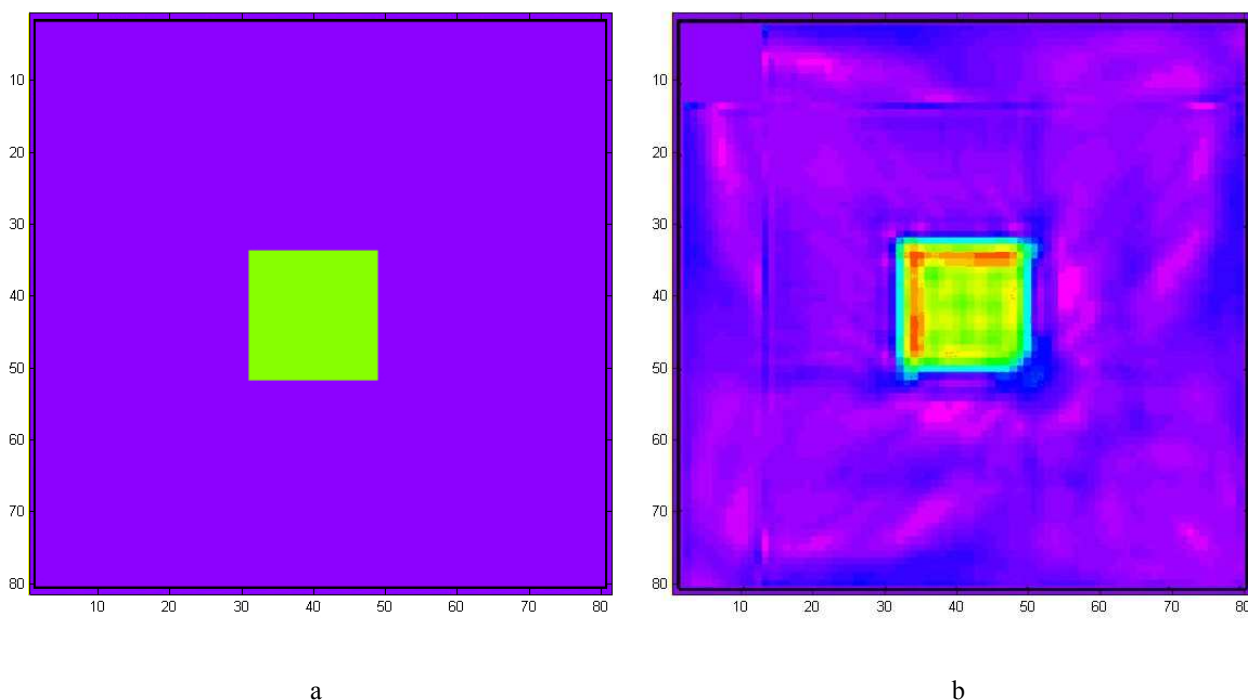


Рис. 2 Исходное и восстановленное дифференциальным методом изображение объекта.

б. *Выводы.*

Рассматриваемая обратная задача является нелинейной, имеет большую размерность и является сложной для реализации даже на современных супер-ЭВМ. Интегральный подход может быть с успехом применен в случае простой структуры неоднородности (например, несколько небольших по размерам неоднородностей). Методы решения обратной задачи, основанные на дифференциальном подходе, требуют меньшего объема вычислений. В планах работ стоит разработка программного обеспечения для дифференциального подхода в трехмерных задачах волновой томографии на суперкомпьютерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. Chavent G. Deux resultats sur le probleme inverse dans les equations aux derivees partielles du deuxieme ordre an t et sur l'unicite de la solution du probleme inverse de la diffusion // Paris. C.R.Acad.Sc. 1970. №270. P.25-28.
3. Natterer F., Wubbeling F. A propagation-backpropagation method for uzltrasound tomography // Inverse Problems. IOP Publishing Ltd.1995. V. 11. P.1225-1232.
4. Beilina L., Klivanov M.V., Kokurin M.Yu. Adaptivity with Relaxation for Ill-Posed Problems and Global Convergence for a Coefficient Inverse Problem // Chalmers Preprint Series. Preprint 2009:47. Gothenburg: University of Gothenburg, 2009.
5. Bakushinsky A.B., Goncharky A.V. Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrect: Kluwer Academic Publ., 1994.
6. Головина С.Г., Романов С.Ю., Степанов В.В. Об одной обратной задаче сейсмоки.- Вестник МГУ, Сер.15, Выч.мат.и.киб., 1994,№4, с.16-21.
7. Goncharskii A.V., Ovchinnikov S. L., and Romanov S.Yu. On the one problem of wave diagnostic // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2010. V.34. №1. P.1-7.
8. Овчинников С.Л., Романов С.Ю. Организация параллельных вычислений при решении обратной задачи волновой диагностики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2008. Т.9. № 2. С.338-345.