

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УЛУЧШЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА В СЛОЕ

А.Е. Ковтанюк

Введение

Изучение радиационно-кондуктивного теплообмена [1, 2] является важным во многих инженерных приложениях. Так в [3-6] изучаются термосвойства некоторых полупрозрачных и изоляционных материалов в рамках радиационно-кондуктивной модели переноса тепла. Математические подходы решения этой нелинейной системы были рассмотрены в работах [7-9]. В [10] доказаны теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи в случае изотропного рассеяния и неотражающих границ. Высокопроизводительный вычислительный алгоритм для решения задачи радиационно-кондуктивного теплообмена предлагается в [11]. Данный алгоритм эффективен для использования технологии параллельных вычислений.

В данной работе решается задача улучшения теплообмена в рассеивающем слое с отражающими границами. В качестве модели, описывающей процесс переноса тепла, рассматривается нелинейная система, состоящая из интегро-дифференциального уравнения переноса и уравнения кондуктивного теплообмена. Границы слоя характеризуются коэффициентами зеркального и диффузного отражения. Для оценки величины теплообмена на основе модифицированного алгоритма метода Монте-Карло, изложенного в [11], рассчитывается температурный профиль для различных значений коэффициентов отражения. Этот алгоритм удобен для применения технологии параллельных вычислений и способен обеспечить требуемую точность за приемлемое вычислительное время. Определяются значения коэффициентов отражения, обеспечивающие высокий уровень теплоотдачи. Данная задача представляется актуальной для определения оптимальных сплавов, используемых при конструировании деталей двигателей, различных энергетических установок, подвергаемых высокому нагреву. Вычисления осуществлены с использованием технологии параллельных вычислений MPI.

Теоретическая часть

Рассмотрим задачу радиационно-кондуктивного переноса тепла в слое [7,8]. Уравнение радиационного переноса тепла в безразмерной форме имеет вид:

$$\nu f_z(z, \nu) + f(z, \nu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 p(\nu, \nu') f(z, \nu') d\nu' + (1-c)u^4(z), \quad (1)$$

где $f(z, \nu)$ безразмерная плотность радиационного потока в точке $z \in [\bar{z}_1, \bar{z}_2]$ и в направлении, косинус угла которого с положительным направлением оси z составляет $\nu \in [-1, 1]$; $c < 1$ есть альbedo однократного рассеяния, описывающее уровень рассеяния в среде; $p(\nu, \nu')$ - фазовая функция; $u(z)$ - безразмерная температура. Введем следующее множество для задания граничных условий:

$$\Gamma^- = (\{\bar{z}_1\} \times (0, 1]) \cup (\{\bar{z}_2\} \times [-1, 0)).$$

Присоединим к уравнению (1) следующие граничные условия:

$$f(\bar{z}_i, \nu) = h(\bar{z}_i) + (Bf)(\bar{z}_i, \nu), \quad i = 1, 2, \quad (\bar{z}_i, \nu) \in \Gamma^-, \quad (2)$$

где

$$h(\bar{z}_i) := \varepsilon_i U_i^4, \quad (Bf)(\bar{z}_i, \nu) := \rho_i^s f(\bar{z}_i, -\nu) + 2\rho_i^d \int_0^1 f(\bar{z}_i, -\text{sgn}(\nu)\nu') \nu' d\nu'.$$

Здесь, U_1 и U_2 безразмерные температуры на границах слоя; ρ_i^s и ρ_i^d - коэффициенты зеркального и диффузного отражения; $\varepsilon_i = 1 - \rho_i^s - \rho_i^d$ - коэффициенты излучения для обеих границ.

Уравнение кондуктивного переноса тепла запишем в следующем виде

$$u''(z) = \frac{1}{2N_c} \frac{d}{dz} \left(\int_{-1}^1 f(z, \nu) \nu d\nu \right), \quad (3)$$

где N_c есть кондуктивно-радиационный параметр [7]. К уравнению (3) присоединим следующие граничные условия:

$$u(\bar{z}_1) = U_1, \quad u(\bar{z}_2) = U_2. \quad (4)$$

Для нахождения решения системы (1)-(4) применим метод простой итерации с параметром. В соответствии с которым, начальное приближение для температуры $u(z)$ (например, линейное приближение,

которое соответствует нулевому значению правой части уравнения (3)) обозначим через $u^{(0)}(z)$. Затем, подставляя $u^{(0)}(z)$ в (1) вместо функции $u(z)$, находим решение задачи (1)-(2), и обозначим его через $f^{(1)}(z, \nu)$. Далее, находим решение задачи (3)-(4), соответствующее заданной функции $f^{(1)}(z, \nu)$, и обозначим его как $\tilde{u}^{(1)}(z)$. Выберем малый положительный параметр α и положим $u^{(1)}(z) = \alpha \tilde{u}^{(1)}(z) + (1 - \alpha)u^{(0)}(z)$ в качестве следующего приближения функции $u(z)$. Затем, подставляя $u^{(1)}(z)$ вместо функции $u(z)$ в уравнение (1), находим следующее приближение $f^{(2)}(z, \nu)$, и т.д. Таким образом, на j -ом шаге мы используем функции $u^{(j-1)}(z)$ и $\tilde{u}^{(j)}(z)$ для нахождения следующего приближения функции $u(z)$ по формуле:

$$u^{(j)}(z) = \alpha \tilde{u}^{(j)}(z) + (1 - \alpha)u^{(j-1)}(z). \quad (5)$$

Основная сложность в численной реализации итерационного метода заключается в решении краевой задачи для уравнения переноса теплового излучения. Для нахождения решения задачи (1),(2) будем использовать рекурсивный алгоритм, основанный на модифицированном алгоритме метода Монте-Карло [11]. Для его описания введем следующие интегральные выражения

$$\begin{aligned} (A\varphi)(z, \nu) &= \frac{1}{\nu} \int_{\xi(\nu)}^z \exp\left(-\frac{z-z'}{\nu}\right) \varphi(z', \nu) dz', \\ (S\varphi)(z, \nu) &= \frac{c}{2} \int_{-1}^1 p(\nu, \nu') \varphi(z, \nu') d\nu', \\ (Tf)(z, \nu) &= (Bf)(\xi(\nu), \nu) \exp\left(-\frac{z-\xi(\nu)}{\nu}\right) + (ASf)(z, \nu), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\xi(\nu) = \begin{cases} \bar{z}_1, & \nu \in (0, 1], \\ \bar{z}_2, & \nu \in [-1, 0). \end{cases}$$

Отметим, что согласно [12] решение задачи (1)-(2), которое может быть представлено в виде ряда Неймана:

$$f(z, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k f_0)(z, \nu), \quad (7)$$

$$f_0(z, \nu) = \exp\left(-\frac{z-\xi(\nu)}{\nu}\right) h(\xi(\nu)) + (1-c)(Au^4)(z, \nu).$$

Применим алгоритм метода Монте-Карло для вычисления конечной суммы

$$f_N(z, \nu) = \sum_{n=0}^N (T^n f_0)(z, \nu). \quad (8)$$

Перепишем (8) в виде следующего рекурсивного отношения

$$f_n(z, \nu) = (Tf_{n-1})(z, \nu) + f_0(z, \nu), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим структуру оператора T (см. равенство (6)). Он состоит из двух слагаемых: первое описывает эффекты отражения, второе - эффекты рассеяния. Рассмотрим второе слагаемое более подробно. Используя простые преобразования, мы запишем его в следующей форме

$$I(z, \nu) = \frac{c}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{z-\xi}{\nu}\right)\right) \int_{\xi-1}^z \int_{-1}^1 \frac{\exp(-(z-z')/\nu)}{\nu(1 - \exp(-(z-\xi)/\nu))} p(\nu, \nu') f(z', \nu') d\nu' dz', \quad (9)$$

где $\xi = \xi(\nu)$. В соответствии с методом Монте-Карло мы аппроксимируем интеграл в этом выражении как математическое ожидание от случайных последовательностей, определенных через случайные величины z' и ν' , распределенные на интервалах (ξ, z) и $(-1, 1)$ с плотностями

$$\frac{\exp(-(z-z')/\nu)}{\nu(1 - \exp(-(z-\xi)/\nu))}, \quad \frac{1}{2} p(\nu, \nu'), \quad (10)$$

Следовательно интеграл (9) аппроксимируется следующей суммой

$$\bar{I}(z, \nu) = \frac{c}{M} \left(1 - \exp\left(-\frac{z - \xi(\nu)}{\nu}\right) \right) \sum_{k=1}^M f(z_k, \nu_k).$$

Здесь, $\nu_k, z_k, k = 1, 2, \dots, M$ есть независимые реализации случайных величин z' и ν' , распределенных на интервалах (ξ, z) и $(-1, 1)$ с плотностями (10). Следовательно, мы можем следующим образом аппроксимировать функции $f_n(z, \nu), n = 1, 2, \dots, N$:

$$f_n(z, \nu) \approx \bar{f}_n(z, \nu) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M s_{n,k}(z, \nu), \quad \bar{f}_0(z, \nu) = f_0(z, \nu), \quad (11)$$

$$s_{n,k}(z, \nu) = \left(B \bar{f}_{n-1} \right) (\xi(\nu), \nu) \exp\left(-\frac{z - \xi(\nu)}{\nu}\right) + c \left(1 - \exp\left(-\frac{z - \xi(\nu)}{\nu}\right) \right) \bar{f}_{n-1}(z_k, \nu_k) + f_0(z, \nu). \quad (12)$$

Таким образом, конечная сумма (8) может быть вычислена на основе рекуррентных соотношений (11), (12).

Для конструирования устойчивого варианта итерационной процедуры запишем аналитическое представление решение задачи (3)-(4) при заданной функции f . После интегрирования равенства (3) получим

$$u(z) = \frac{1}{2N_c} \int_0^z \int_{-1}^1 f(\zeta, \nu) \nu d\nu d\zeta + C_1 z + C_2, \quad (13)$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий (4).

Предположим, что приближение температуры $\bar{u}^{(j-1)}(z)$ уже найдено на $(j-1)$ -ом шаге итерационной процедуры (5). На основе (5) и (13) мы получаем следующую аппроксимацию для температуры на j -ом шаге:

$$\bar{u}^{(j)}(z) = (1 - \alpha) \bar{u}^{(j-1)}(z) + \alpha \left(\frac{z}{MN_c} \sum_{k=1}^M \nu_k \bar{f}_N^{(j)}(z_k, \nu_k) + C_1 z + C_2 \right), \quad (14)$$

где случайные величины z_k и ν_k являются равномерно распределенными на соответствующих интервалах $(0, z)$ и $(-1, 1)$. Вычисление $\bar{f}_N^{(j)}(z, \nu)$ осуществляем на основе формул (11) и (12), полагая, что температура равна $\bar{u}^{(j-1)}(z)$. Постоянная C_1 также вычисляется с помощью метода Монте-Карло. Таким образом, приближение $\bar{u}^{(j)}(z)$ функции $u^{(j)}(z)$ вычисляется с помощью формул (11), (12) и (14).

Заметим, что рекуррентный алгоритм, основанный на методе Монте-Карло, удобен для использования параллельных компьютерных вычислений. Имеется два основных пути параллелизации вычислительного процесса. В первом, вычисление функции f в каждой точке слоя выполняется в отдельном процессе. Другой подход основывается на генерации каждой рекурсивной траектории метода Монте-Карло в отдельном процессе.

Рассмотрим следующую величину, характеризующую отдачу тепла от нагретых стенок слоя

$$F = \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} u(z) dz. \quad (15)$$

Очевидно, что большее значение F соответствует лучшей отдаче тепла от стенок слоя, то есть лучшему их охлаждению. Величина F зависит от коэффициентов задачи (1)-(4), в частности тех, которые характеризуют материал внешней части слоя: коэффициентов зеркального и диффузного отражения. Пусть $\rho_1^s = \rho_2^s = \rho^s$ и $\rho_1^d = \rho_2^d = \rho^d$. Сформулируем следующую задачу, направленную на определение отражающих характеристик границ слоя, обеспечивающих лучшую теплоотдачу.

Задача. Требуется определить значения коэффициентов $\rho^s, \rho^d, 0 \leq \rho^s + \rho^d < 1$, обеспечивающих максимальное значение функции (15):

$$F(\rho^s, \rho^d) \rightarrow \max, \quad 0 \leq \rho^s + \rho^d < 1. \quad (16)$$

Экспериментальная часть

Для решения задачи (16) сделаем разбиение области $0 \leq \rho^s + \rho^d < 1$:

$$\{(\rho^s, \rho^d) : \rho^s = 0.0999k, \rho^d = 0.0999n, 0 \leq \rho^s + \rho^d < 1\}. \quad (17)$$

В узлах сетки (17), на основе итерационного алгоритма (5) и рекуррентных соотношений (11), (12), (14) производим вычисление функции (15).

Предложенный алгоритм позволяет осуществить два способа параллелизации вычислительного процесса: в первом, в отдельных процессах осуществляется вычисление температуры в точках слоя, во втором, генерация траекторий метода Монте-Карло. Оба способа демонстрируют хорошее ускорение алгоритма, близкое к линейному. Так, при распараллеливании алгоритма по точкам слоя, при использовании 32 вычислительных процессов, отклонение от линейного ускорения составило менее 3%. При распараллеливании по траекториям метода Монте-Карло, при использовании 32 процессов, отклонение от линейного ускорения составило около 6%. Однако, преимуществом второго способа параллелизации является его сверхмасштабируемость, поскольку для вычисления температуры в одной точке слоя используется от 2000 траекторий (а для случаев высоких температур до 10000 траекторий), генерация которых может быть выполнена в отдельных независимых процессах.

Реализация рекурсивного вычислительного алгоритма была осуществлена в C++ коде с использованием технологии MPI. Для вычисления значений функции (15) проводилось вычисление нормализованной температуры в 16 точках слоя, при этом для нахождения температуры в одной точке генерировалось 2000 траекторий. При проведении вычислительных экспериментов были взяты следующие значения параметров задачи:

$$N = 10, N_c = 0.005, c = 0.9, \bar{z}_2 - \bar{z}_1 = 3, U_1 = 1, U_2 = 0.5.$$

На рисунке 1 представлен двумерный график функции $F(\rho^s, \rho^d)$ в зависимости от коэффициентов зеркального (Specular) и диффузного (Diffuse) отражения. Слабая теплоотдача соответствует случаю, когда значение коэффициента излучения границ слоя стремится к 0. На представленном графике видны области значений коэффициентов зеркального и диффузного отражения, обеспечивающих наилучшую теплоотдачу.

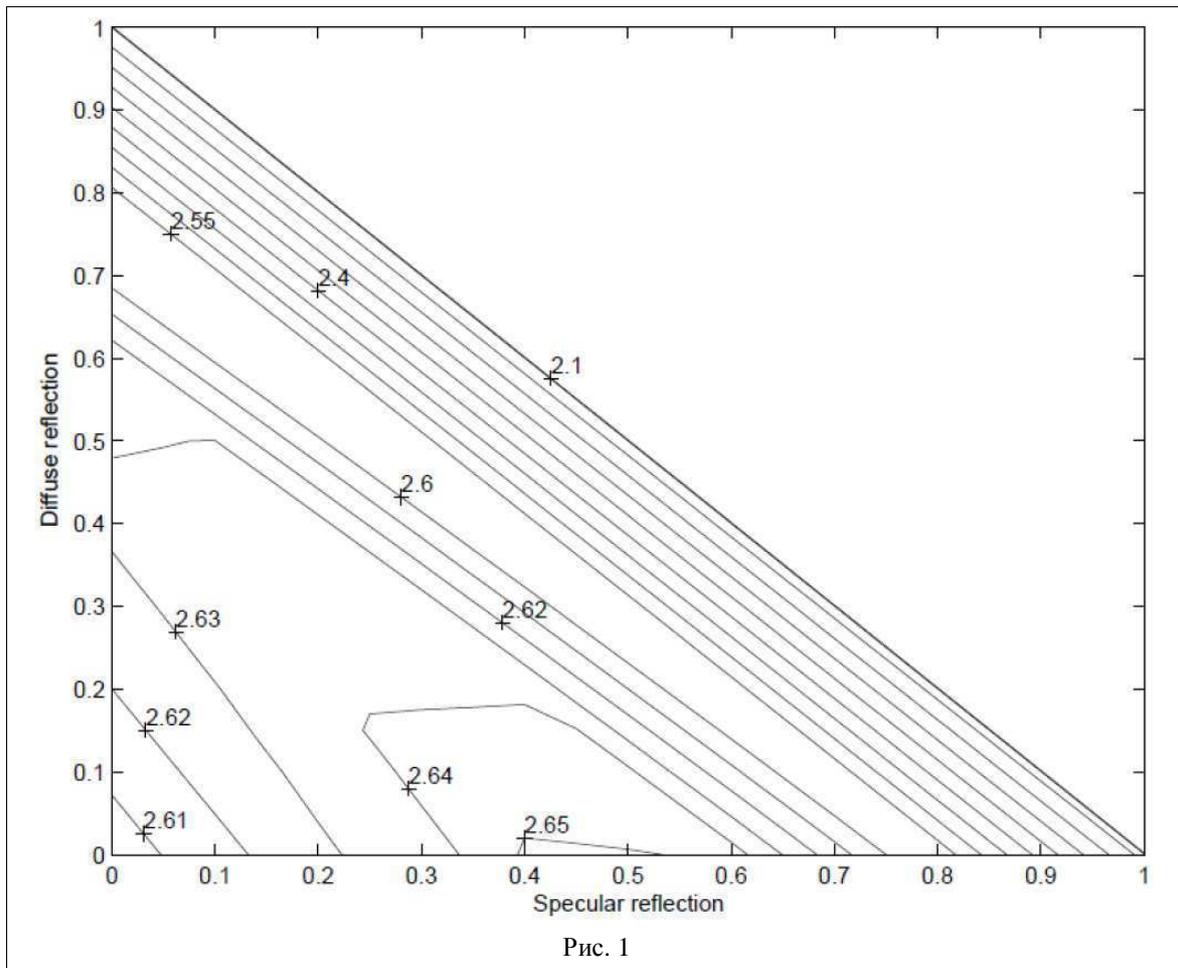
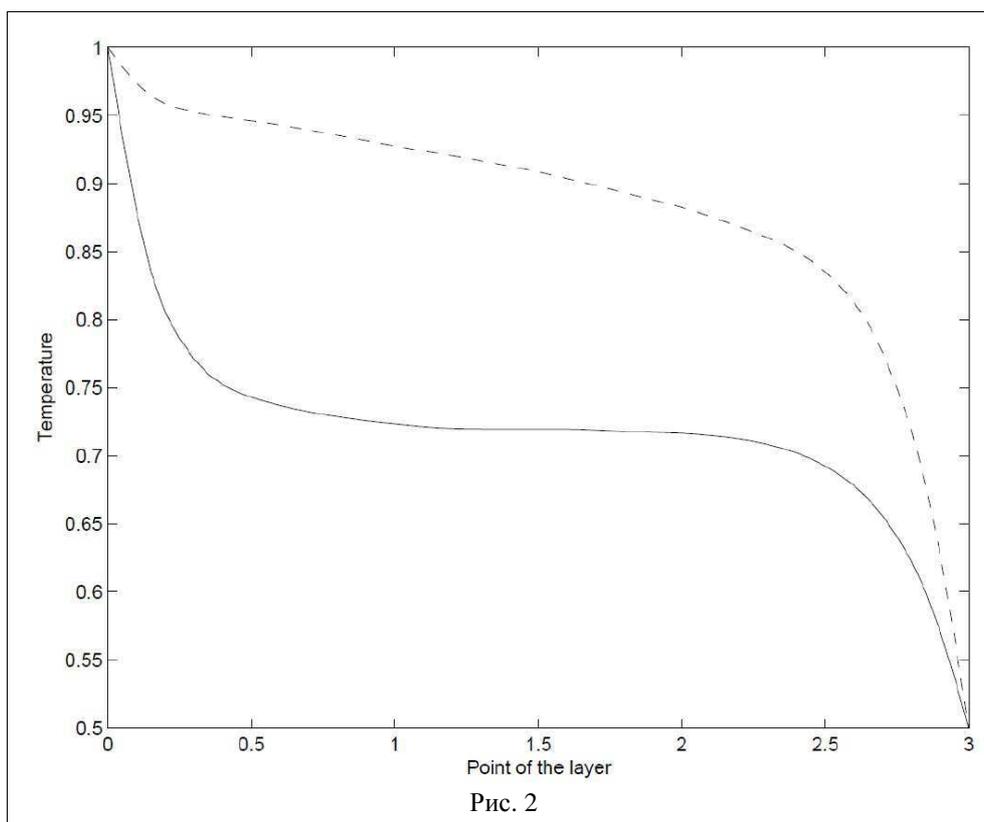


Рис. 1

На рисунке 2 представлены графики обезразмеренных температурных профилей (Temperature) как функций точек слоя (Point of the layer) для следующих случаев: $\rho^s = 0.4$, $\rho^d = 0.6$ (непрерывная линия) и $\rho^s = 0.4$, $\rho^d = 0$ (штриховая линия).



Заключение

В данной работе на основе параллельного алгоритма решена задача улучшения теплообмена в рассеивающем слое с отражающими границами. Определены области значений коэффициентов зеркального и диффузного отражения, обеспечивающих наилучшую теплоотдачу. Результаты исследований могут быть использованы для определения оптимальных сплавов, используемых при конструировании деталей двигателей, различных энергетических установок, подвергаемых высокому нагреву.

ЛИТЕРАТУРА:

1. M.N. Ozisik, Radiative Transfer and Interaction with Conduction and Convection. John Wiley, New York, 1973.
2. M.F. Modest, Radiative Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1993.
3. S. Andre, A. Degiovanni, A theoretical study of the transient coupled conduction and radiation heat transfer in glass: phonic diffusivity measurements by the Nash technique// Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. Vol. 38, N 18. P. 3401-3412.
4. S. Andre, A. Degiovanni, A new way of solving transient radiative-conductive heat transfer problems// J. Heat Transfer. 1998. Vol. 120, N. 4. P. 943-955.
5. J.M. Banoczi, C.T. Kelley, A fast multilevel algorithm for the solution of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations// SIAM J. Sci. Comp. 1998. Vol. 19, N. 1. P. 266-279.
6. A. Klar, N. Siedow, Boundary layers and domain decomposition for radiative heat transfer and diffusion equations: applications to glass manufacturing process// Eur. J. Appl. Math. 1998. Vol. 9, N. 4. P. 351-372.
7. C.E. Siewert, J.R. Thomas, A computational method for solving a class of coupled conductive-radiative heat-transfer problems// J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1991. Vol. 45, N. 5. P. 273-281.
8. C.E. Siewert, An improved iterative method for solving a class of coupled conductive-radiative heat-transfer problems// J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1995. Vol. 54, N. 4. P. 599-605.
9. L.B. Barichello, P. Rodrigues, C.E. Siewert, An analytical discrete-ordinates solution for dual-mode heat transfer in a cylinder// J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2002. Vol. 73. P. 583-602.
10. C.T. Kelley, Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations// Transport Theory Statist. Phys. 1996. Vol. 25, N. 2. P. 249-260.

11. А.Е. Ковтанюк, Высокопроизводительный алгоритм для задачи радиационно-кондуктивного переноса тепла в слое// Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2012)», Новосибирск, 26-30 марта 2012, с.516-524.
12. I.V. Prokhorov, I.P. Yarovenko, N.V. Krasnikova, An extremum problem for the radiation transfer equation// J. Inverse Ill-Posed Problems. 2005. Vol. 13. P. 365-382.