МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ПАМЯТЬЮ, ОСНОВАННОЕ НА ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАГЕРРА И АДДИТИВНОМ МЕТОДЕ ШВАРЦА

М.А. Белоносов, Г.В. Решетова, С.А. Соловьёв, В.А. Чеверда

Введение

Проведение полномасштабного численного моделирования сейсмических волн в реалистичных трёхмернонеоднородных средах невозможно без ориентации на параллельные вычисления на основе декомпозиции области. В настоящее время наиболее распространённым способом их организации является использование явных конечно-разностных схем. Однако этот подход имеет ряд существенных недостатков, среди которых наиболее существенным является обмен данными между соседними процессорными элементами на каждом шаге по времени. Поэтому значительные усилия применяются для развития методов численного моделирования, основанных на отделении времени. Основное внимание здесь сосредоточено на отделении времени путём применения преобразования Фурье [Plessix, 2007]. Однако при этом возникают существенные трудности при решении задач в реалистичных постановках и связаны они в основном со знаконеопределённостью пространственного оператора. Именно из-за этого скорость итерационных процессов решения систем линейных алгебраических уравнений неприемлемо низка.

В настоящей работе предлагается выполнять отделение времени путём применения интегрального преобразования Лагерра. Оно приводит к знакоопределённому эллиптическому оператору [Mikhailenko et al., 2003], что создаёт основу для возможного применения метода декомпозиции области и альтернирования по Шварцу для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений [Chan and Matthew, 1994; Gander et al., 2001]. Декомпозиция области выбирается таким образом, чтобы обеспечить возможность вычислять LU-разложение соответствующей матрицы в каждой элементарной подобласти. Полученное LU-разложение сохраняется и в дальнейшем используется для каждой компоненты разложения Лагерра и для каждого источника.

Преобразование Лагерра и метод Шварца

Рассмотрим интегральное преобразование Лагерра по времени:

с

$$u_n(x,z) = \int_0^\infty u(x,z,t)\cdot(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht)\,dt,$$

формулой обращения

$$u(x,z,t) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x,z)\cdot(ht)^{\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht)$$

Здесь

$$l_n^\alpha(ht)$$

функции Лагерра

$$l_n^\alpha(ht) = \sqrt{\frac{n!}{(n+\alpha)!}}(ht)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{ht}{2}} L_n^\alpha(ht),$$

где $h \in R_+$, $\alpha \in Z_+$, и

$L_n^{\alpha}(ht)$ - классические стандартизованные полиномы Лагерра [Суетин, 1974].

…енение этого преобразования к двумерной системе уравнений динамической теории упругости второго порядка приводит нас к эллиптической системе со знакоопределённым оператором

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x^n}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_z^n}{\partial z}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\frac{\partial u_z^n}{\partial x}+\mu\frac{\partial u_x^n}{\partial z}\right]-\rho\frac{h^2}{4}u_x^n=F_n^x\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial u_z^n}{\partial x}+\mu\frac{\partial u_x^n}{\partial z}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda\frac{\partial u_x^n}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z^n}{\partial z}\right]-\rho\frac{h^2}{4}u_z^n=F_n^z
\end{aligned}\right\}$$

где λ, μ – коэффициенты Ламэ, ρ – плотность,

F_n^x , F_n^z – рекуррентно вычисляемые правые части [Mikhailenko et al, 2003].

Окаймление расчётной области идеально подходящим слоем вводится аналогично тому, как это было сделано в работе [Решетова, Чеверда, 2006].

Из полученной системы видно, что оператор её левой части не зависит от параметра разделения *n* и к тому же он знакоопределённий и эллиптический. Эти свойства являются основными преимуществами преобразования Лагерра.

Основная идея применяемого далее метода альтернирования Шварца (аддитивный метод Шварца) [Мацокин, Непомнящих, 1985; Chan, Mathew, 1994] состоит в том, что решение вычисляется не во всей расчётной области, а в каждой отдельной элементарной подобласти её пространственной декомпозиции с последующей организацией обменов между соседями. В частности, для отыскания решения в области *D*, вводится разбиение последней на перекрывающиеся подобласти D_1 и D_1 (рис. 1). На первой итерации метода Шварца решение ищется в этих подобластях с произвольными граничными условиями Дирихле на границах S_1 и S_1. На каждой последующей итерации на каждой из этих границ ставится условие, равное значению уже найденного решения задачи на предыдущей итерации из соседней подобласти. Сходимость итерационного процесса гарантируется знакоопределённостью оператора и наличием перекрытия [Gander et al., 1999].

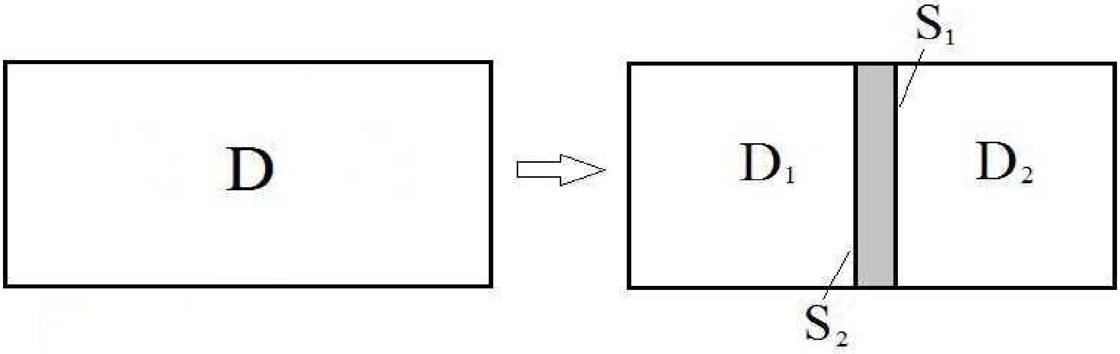

Рис. 1. Декомпозиция области с перекрытием.

Параллельные вычисления

Как правило все современные суперкомпьютерные системы состоят из набора вычислительных узлов, объединяющих несколько многоядерных процессоров с общей памятью. Для организации параллельных вычислений, расчётная область разбивается на несколько перекрывающихся подобластей (рис. 2) и каждая такая подобласть размещается в оперативной памяти данного узла. Далее система уравнений динамической теории упругости в каждой подобласти сводится к системе линейных алгебраических уравнений путём конечно-разностной аппроксимации на сдвинутых сетках [Zahradnik and Priolo, 1995]. Полученная система может быть решена как итерационными, так и прямыми методами, в частности, на основе LU-разложения. Основным недостатком прямых методов по сравнению с итерационными является повышенная потребность в оперативной памяти из-за хранения LU-факторов. Оптимизируя пространственную декомпозицию, мы добиваемся возможности размещения каждой из элементарных подобластей на отдельном узле и обеспечиваем возможность применения для каждой из них LU-декомпозиции. При использовании итерационных методов время расчёта сильно зависит от числа итераций, которые в свою очередь зависят от коэффициентов матрицы и необходимой точности искомого решения. Для прямых методов такой зависимости нет и время расчёта заранее предсказуемо. Также, при решении временных задач прямыми методами LU-разложение строится только один раз, существенно уменьшая время на следующих временных шагах, в то время как итерационные методы требуют выполнения полноценного итерационного процесса на каждом шаге по времени. В результате мы остановились на использовании прямых методов.

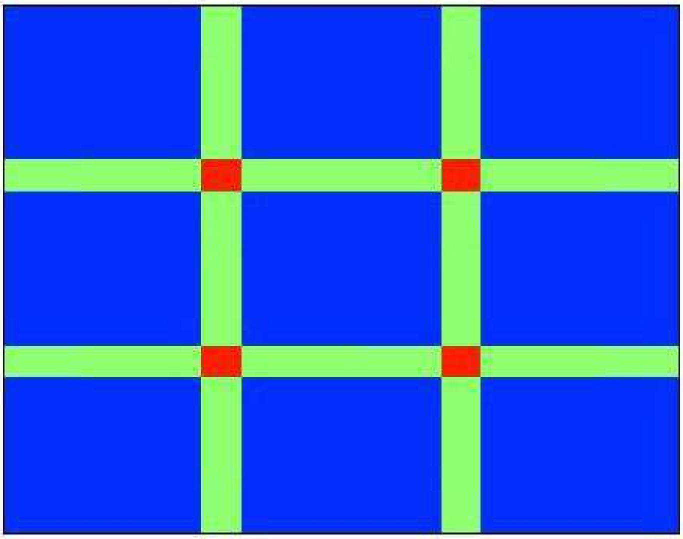

Рис. 2. Декомпозиция расчётной области с перекрытием: в зелёных областях пересекаются 2 подобласти, в красных – 4 подобласти.

Итак, мы имеем дело с двумя вычислительными процессами:

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений на многоядерных узлах с использованием OpenMP;
2. Реализация итерационного метода Шварца с организацией обменов между соседними процессами посредством MPI.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений используется решатель Pardiso из Intel® Math Kernel Library (Intel® MKL). Intel® MKL Pardiso распараллелен и оптимизирован под многоядерные системы с общей памятью (OpenMP). Это даёт возможность эффективно применять все вычислительные ядра всех используемых кластерных узлов. Также Pardiso использует библиотеку METIS, которая осуществляет перестановку столбцов и строк исходной матрицы с целью уменьшения числа ненулевых элементов в LU-факторах. Всё это в совокупности позволяет эффективно решать поставленные задачи.

Численные эксперименты

Чтобы показать возможность реализации предложенного алгоритма была проделана серия численных экспериментов для реалистичной модели одного из районов Северного моря – Gullfaks [Thompson et al., 2003]. Общий вид распределения скорости продольных волн для этой модели представлен на рис. 3. Источник типа центр объёмного расширения с координатами (1620,20) излучает импульс Риккера с доминирующей частотой 30 Гц. Шаг дискретизации расчётной сетки по обоим направлениям – 2 м. Число членов разложения Лагерра берётся равным 450 с $h = 300$ и $\alpha = 5$. Моделирование проводилось до момента времени 3 с. Расчётная область разбивается на 3x3 одинаковые подобласти с перекрытием шириной 100 м (50 точек), как показано на рис.2. На рис.4 представлен моментальный снимок рассчитанного волнового поля. Для этого эксперимента метод Шварца сходится за девять итераций.

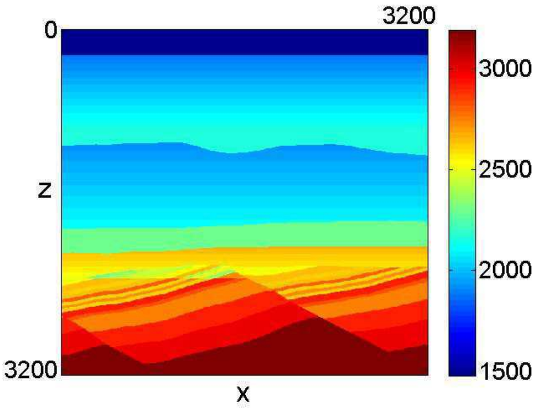

Рис. 3. Распределение скорости продольных волн для реалистичной двумерной модели района Северного моря Gullfaks.

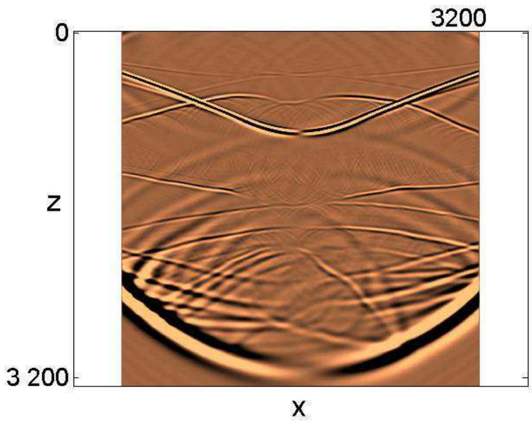

Рис. 4. Моментальный снимок рассчитанного волнового поля для модели Gullfaks.

Ещё один численный эксперимент выполнен для изучения преимущества предложенного подхода при одновременном моделировании сейсмических волн для нескольких источников. С этой целью рассматривалась модель Gullfaks с той же декомпозицией области для увеличивающегося набора источников. Для каждого источника соответствующая правая часть решаемой системы сохраняется в общей памяти узла вместе с LU-разложением. Впоследствии LU-разложение используется для наборов правых частей для различных номеров полиномов Лагерра. Результат расчёта представлен на рис. 5 как нормализованное время вычисления для одного источника

$$T(t_n) = \frac{t(n)}{n}$$

где $t(n)$ это время вычисления для n источников. Из рис. 5 видно, что происходит ускорение почти в два раза для 72 различных источников по сравнению с последовательным решением всей задачи для каждого источника.

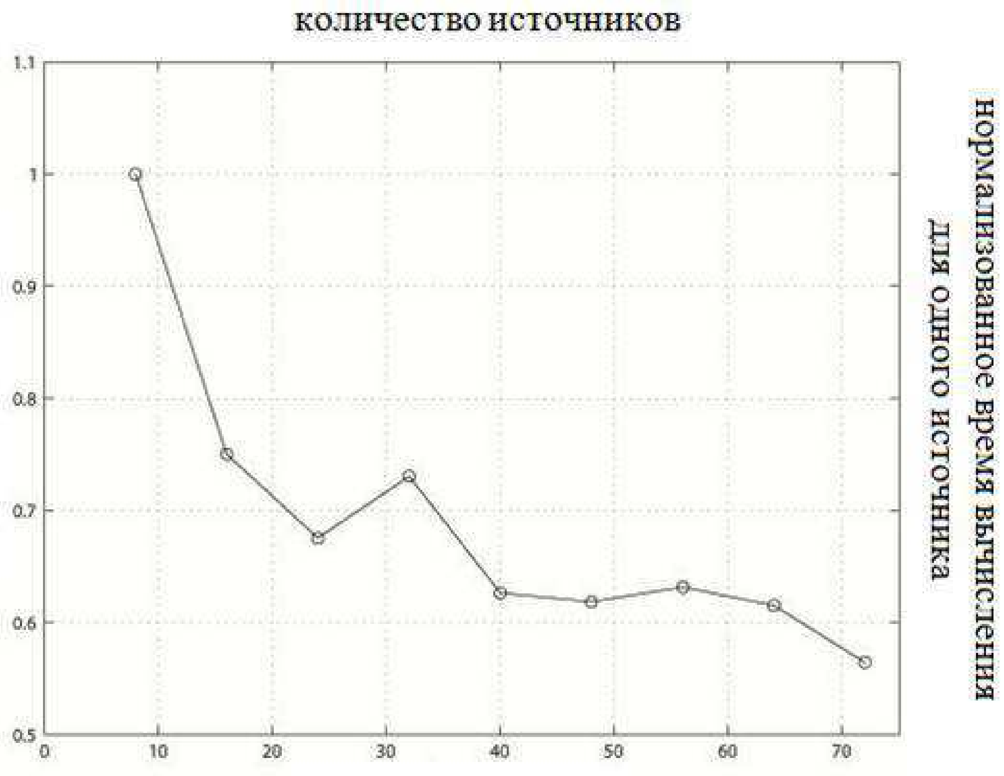

Рис. 5. Нормализованное время вычисления для одновременного моделирования для нескольких источников.

Заключение

В работе предложен новый параллельный алгоритм моделирования сейсмических волн, основанный на отделении времени интегральным преобразованием Лагерра с последующим применением декомпозиции области и аддитивного метода Шварца и реализован на кластерных системах с распределённой памятью. На примере двумерной реалистичной сейсмогеологической модели показана возможность его применения. При этом проиллюстрирована высокая скорость сходимости метода Шварца. Показана возможность использования данного алгоритма при одновременном моделировании для нескольких источников. При этом наблюдается существенная экономия времени расчёта по сравнению с последовательным решением всей задачи для каждого источника.

Дальнейшее развитие настоящей работы видится в использовании предложенного алгоритма при реализации миграции в обратном времени в трёхмерном случае. Несомненно, одним из вариантов оптимизации всего уже предложенного является разработка научно-исследовательского варианта программного обеспечения с привлечением графических процессоров.

Благодарности

Работа была выполнена совместно с Московским научно-исследовательским центром Шлюмберже и частично поддержана грантами РФФИ 10-05-00233, 11-05-00947 и 11-05-12022-офи и грантом президента РФ МК-47.2011.5.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Изв. высш. уч. заведений. Математика. – 1985. - № 10. – С. 99-112.
2. Решетова Г.В., Чеверда В.А. Использование преобразования Лагерра для построения идеально подходящих поглощающих слоёв без расщепления // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18. – № 10. – С. 91-101.
3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены // М.: Наука. – 1974. – С. 203-243.
4. Chan T., Mathew T.P. Domain decomposition // Acta Numerica. – 1994. – V. 3. – P. 61-143.
5. Gander M., Halpern L., Nataf F. Optimized Schwarz Methods // 12-th International Conference on Domain Decomposition Methods (Japan, Chiba, October 25-29, 1999 year). – 2001. – P. 15-27.
6. Gould N.I.M., Hu Y., Scott J.A. A numerical evaluation of sparse direct solvers for the solution of large sparse, symmetric linear systems of equations, Technical Report RAL-TR-2005-005, Rutherford Appleton Laboratory, Chilton, Oxfordshire, England. – 2005.
7. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. – 2003. – V. 51. – P. 37-48.
8. Plessix R.-E. A Helmholtz iterative solver for 3D seismic-imaging problems // Geophysics, 72. – 2007. – P. 185-194.
9. Thompson M., Arntsen B., Amundsen L. Acquisition geometry versus 4C image quality. A study from Gullfaks South. 73-rd SEG Annual International Meeting, Expanded Abstracts, 22 . – 2003. – P. 793-796.
10. Zahradnik J., Priolo E. Heterogeneous formulations of elastodynamic equations and finite-difference schemes // Geophysical Journal International, 120(3). – 1995. – P. 663-676.