ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

К.А. Баркалов

В течение последних лет на факультете ВМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского проводятся работы по распараллеливанию методов глобальной оптимизации [1–5]. В рамках данных исследований рассматриваются многоэкстремальные задачи вида

$$\varphi(y^*)=\min\{\varphi(y):y\in D,\ g_j(y)\le 0,\ 1\le j\le m\}, \quad (1)$$
$$D=\{y\in R^N:\ a_i\le y_i\le b_i,\ 1\le i\le N\},$$

где целевая функция $\varphi(y)$ и левые части ограничений $g_j(y)$, $1\le j\le m$, удовлетворяют условию Липшица с соответствующими константами L_j, $1\le j\le m$.

Используя кривые типа развертки Пеано $y(x)$, однозначно отображающие отрезок [0,1] на N-мерный гиперкуб D

$$D=\{\ y\in R^N:\ -2^{-1}\le y_i\le 2^{-1},\ 1\le i\le N\ \} = \{\ y(x):\ 0\le x\le 1\},$$

исходную задачу (1) можно редуцировать к одномерной задаче

$$\varphi(y(x^*))=\min\{\varphi(y(x)):\ x\in[0,1],\ g_j(y(x))\le 0,\ 1\le j\le m\}, \quad (2)$$

что позволяет применить для ее решения эффективные алгоритмы одномерной оптимизации.

Рассматриваемая схема редукции размерности сопоставляет многомерной задаче с липшицевой минимизируемой функцией и липшицевыми ограничениями задачу (2), в которой соответствующие одномерные функции удовлетворяют условию Гельдера

$$|g_j(y(x')) - g_j(y(x''))|\le K_j|x' - x''|^{1/N},\ \ x',x''\in[0,1],$$

где N есть размерность исходной многомерной задачи, а коэффициенты K_j связаны с константами Липшица L_j исходной задачи соотношениями $K_j \le 4L_j\sqrt{N}$. Различные варианты алгоритмов для решения одномерных задач и соответствующая теория сходимости представлены в работах [1], [2].

Однако использование подобной схемы редукции размерности при решении многомерных задач порождает следующую проблему: близким в N-мерном пространстве образам y', y'' могут соответствовать достаточно далекие прообразы x', x'' на отрезке [0,1] (так как точка $x\in[0,1]$ имеет лишь левых и правых соседей, а соответствующая ей точка $y(x)\in R^N$ имеет соседей по 2^N направлениям). Как результат, единственной точке глобального минимума в многомерной задаче может соответствовать до 2^N локальных экстремумов в одномерной задаче, что, естественно, ухудшает свойства одномерной задачи.

Сохранить часть информации о близости точек и улучшить сходимость метода позволяет использование множества отображений

$$Y_L(x)=\{y^1(x),\dots,\ y^L(x)\}$$

вместо применения единственной кривой Пеано $y(x)$ (см. [4]). Каждая кривая Пеано $y^l(x)$ из $Y_L(x)$ может быть получена в результате вращения оригинальной развертки вокруг начала координат. При этом найдется отображение $y^l(x)$, сопоставляющее точкам многомерного пространства y', y'', которым при исходном отображении соответствовали достаточно далекие прообразы на отрезке [0,1], более близкие прообразы x', x''.

Одновременно с сохранением информации о близости точек использование множества отображений позволяет распараллелить алгоритм глобального поиска. В самом деле, использование отображений $Y_L(\mathrm{x})=\{y^1(x),\dots,y^L(x)\}$ приводит к формированию соответствующего множества одномерных подзадач

$$\min\{\varphi(y^l(x)) : x\in[0,1],\ g_j(y^l(\mathrm{x}))\le 0,\ 1\le j\le m\},\ 1\le l\le L. \quad (3)$$

Каждая задача из данного набора может решаться независимо, при этом любое вычисленное значение $z=g_v(y')$, $y'=y^i(x')$ функции $g_v(y)$ в i-й задаче может интерпретироваться как вычисление значения $z=g_v(y')$, $y'=y^s(x'')$ для любой другой s-й задачи без повторных трудоемких вычислений функции $g_v(y)$.

Подобное информационное единство позволяет решать исходную задачу (1) путем параллельного решения L задач вида (3) на наборе отрезков [0,1]. Каждая одномерная задача решается на отдельном процессоре. Для организации взаимодействия на каждом процессоре создается L очередей, в которые процессоры помещают информацию о выполненных итерациях. Используемая схема не содержит какого-либо единого управляющего процессора, что увеличивает надежность выполняемых вычислений. Детальное описание правил параллельного алгоритма глобальной оптимизации (обозначаемого в дальнейшем П-АГП) приведено в работах [4, 5].

Применение параллельного алгоритма глобального поиска дает хорошие результаты в прикладных задачах (см. [6], [7]). Ниже дадим характеристику одной из таких задач – задачи оптимизации расположения радиомаяков в разностно-дальномерной системе посадки летательных аппаратов. Подробно описание проблемы приведено в работе [8], здесь используется уже построенная математическая модель. Дадим ее краткое описание.

Для определения высоты летательного аппарата (ЛА) вблизи взлетно-посадочной полосы (ВПП) располагается несколько радиомаяков, которые по поступившей команде излучают радиосигналы. На борту ЛА измеряются интервалы ΔT_i между приходами радиосигналов от маяков; предполагается, что указанные интервалы измеряются со случайной ошибкой δ_i .Для моделирования движения ЛА используется линейная модель

$$x_{k+1}=Ax_k+\xi_k$$

Измерения положения ЛА также моделируются линейно

$$y_{k+1}=G_k y_k+\eta_k.$$

Здесь $x_k=\left[x_c^k, y_c^k, z_c^k\right]^T$ – вектор состояния системы (текущее положение ЛА), $y_k=\left[\Delta T_1^k, \Delta T_2^k, ..., \Delta T_m^k\right]^T$ – вектор измерений, а ξ_k, η_k – независимые гауссовские случайные последовательности с известным математическим ожиданием ($M\xi_k=u_k$ вектор поправок к текущим координатам ЛА; $M\eta_k=0$ – систематическая ошибка измерения отсутствует) и известными положительно определенными ковариационными матрицами P и Q.

Моделируется проведение 100 измерений (т.е. $1\le k\le 100$), при этом $63\le k\le 100$ соответствуют положению ЛА над ВПП. Ставится задача минимизации максимальной погрешности определения высоты ЛА при движении над ВПП, т.е. критерием является функция

$$\varphi(x)=\max_{63\le k\le 100} P_k^{3,3}(x).$$

где $P_k^{3,3}$ обозначает элемент матрицы ковариаций ошибок оценивания вектора состояния системы с индексами (3,3), т.е. минимизируется дисперсия ошибки оценивания высоты ЛА.

Рассмотрено решение задачи расположения четырех маяков (варьируются x-координаты расположения у двух из них), пяти (варьируются x- и y-координаты расположения у двух из них) и шести маяков (варьируются x-координаты расположения четырех из них) [8]. Рассматриваемые задачи являются многоэкстремальными. Автор выражает признательность С.М. Елсакову за предоставленные программные коды, реализующие вычисление целевой функции в рассматриваемых задачах.

В качестве эталонных решений рассматриваемых задач использовались результаты, полученные в [8, 10] с помощью алгоритма [9]. Следуя за автором работы, будем обозначать данный алгоритм как ОАКР (Однородный Алгоритм глобальной оптимизации с Кубическим сплайном и Расстоянием до точки испытания).

Табл. 1. Результаты, полученные с помощью ОАКР

N	$\varphi(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	k
2	1.638	31.5	242.3			1000
4	0.78	148.85	78.96	155.75	94.89	1000
4	0.526	152.97	287.79	3.34	26.05	1000

Здесь N – размерность решаемой задачи, x_i – координаты полученного решения, k – число итераций метода. Сравним решения, полученные ОАКР, с решениями, полученными АГП (запускался последовательный алгоритм, плотность развертки m=12, число разверток L=3, параметр надежности r=1.2). В таблице приведено также время T (в секундах), затраченное на решение задачи

Табл. 2. Результаты, полученные с помощью АГП

N	$\varphi(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	k	T
2	1.638	34.42	242.43			349	0.84
4	0.723	180.72	86.48	172.42	81.01	5425	30.2
4	0.501	14.465	463.56	274.96	260.19	4509	25.7

Сравнение полученных результатов показывает, что АГП нашел более точное решение задачи, по сравнению с ОАКР, лежащее достаточно далеко от исходного.

Приведем теперь результаты работы параллельного алгоритма глобального поиска с вращаемыми развертками. При проведении экспериментов использовался кластер ННГУ на базе Intel Xeon 3.2 GHz; размер оперативной памяти на процессор – 4 Гб, операционная система – Windows Server 2008, система управления – Microsoft HPC Server 2008. В таблице дополнительно приведено число задействованных процессоров p (оно совпадает с числом разверток), и показатель ускорения S.

Табл. 3. Результаты, полученные с помощью П-АГП

N	$\varphi(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	k	p	T	S
2	0.4934	37.84	242.43			248	3	0.53	1,6

4	0,728	176.94	85.8	171.57	81.52	2620	12	13.1	2,3
4	0.5	14.95	479.06	274.84	259.70	1759	12	11.0	2,3

Дадим содержательную интерпретацию найденных решений. В задаче расположения четырех радиомаяков (N=2) оба алгоритма (ОАКР и АГП) нашли одинаковые расположения радиомаяков.

В задаче расположения пяти радиомаяков (N=4) предложены два различных расположения, разница по оси вдоль ВПП составляет 40 м. При этом выигрыш по точности измерения у расположения, найденного АГП, составил 7%.

В задаче расположения шести радиомаяков (N=4) также предложены два различных расположения. В одном расположении два маяка сгруппированы около точки посадки (3,43 м + 26,05 м), в другом – около начала ВПП (260,19 м + 274,96 м). При этом выигрыш по точности измерения у расположения, найденного АГП, составил 5%.

Итак, в работе представлено описание параллельного алгоритма глобальной оптимизации, приведены результаты решения с помощью данного алгоритма задачи оптимизации расположения радиомаяков в разностно-дальномерной системе посадки летательных аппаратов. Указанная задача была решена с использованием разработанной на факультете ВМК ННГУ им. Н.И.Лобачевского параллельной системы глобальной оптимизации GlobalExpert.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-01-00682-а, а также гранта Президента РФ НШ-1960.2012.9.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Р.Г. Стронгин, К.А. Баркалов. О сходимости индексного алгоритма в задачах условной оптимизации с ε-резервированными решениями // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1999. С. 273 – 288.
2. К.А. Баркалов, Р.Г. Стронгин. Метод глобальной оптимизации с адаптивным порядком проверки ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002., Т.42, №9. С. 1338–1350.
3. К.А. Баркалов. Ускорение сходимости в задачах условной глобальной оптимизации. Нижний Новгород: изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2005.
4. Р.Г. Стронгин, В.П. Гергель, К.А. Баркалов. Параллельные методы решения задач глобальной оптимизации // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – Т. 52. №10, 2009.–С. 25–32.
5. К.А. Баркалов, В.В. Рябов, С.В. Сидоров. О некоторых способах балансировки локального и глобального поиска в параллельных алгоритмах глобальной оптимизации // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11, №2, с.189–194.
6. И.М. Губайдуллин, В.В. Рябов, М.В. Тихонова. Применение индексного метода глобальной оптимизации при решении обратных задач химической кинетики // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12, №1, с.137–145.
7. В.П. Гергель, В.А. Горбачев, Н.Н. Оленев, В.В. Рябов, С.В. Сидоров. Параллельные методы глобальной оптимизации в идентификации динамической балансовой нормативной модели региональной экономики // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2011 №25 (242). С. 4–15.
8. Антонов М.О., Елсаков С.М., Ширяев В.И. Нахождение оптимального расположения радиомаяков в разностно-дальномерной системе посадки летательного аппарата // Авиакосмическое приборостроение. 2005. №11. С.41–45.
9. Елсаков С.М., Ширяев В.И. Однородные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. №10. С. 1-14.
10. Елсаков С.М. Однородные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации и модели липшицевых целевых функций: автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 // Челябинск, 2011.