

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ

Е.С. Козлова, В.В. Котляр

## **Введение**

Высокая универсальность метода конечных разностей и связанные с ним широкие возможности для разработки параллельных вычислительных алгоритмов делает его эффективным средством решения многомерных краевых задач для дифференциальных уравнений, описывающих процессы распространения света в волноводах, что объясняет стабильный интерес исследователей к этой теме.

Настоящая работа посвящена решению конечно-разностного двумерного однонаправленного волнового уравнения, описывающего распространение электромагнитного излучения в волноводе прямоугольного сечения. Проведение расчетов потребовало применения весьма мелких сеток, что в случае двух пространственных и одной временной переменных сопряжено с большими объемами вычислительных затрат и необходимой оперативной памяти. Для проведения расчетов были разработаны параллельные вычислительные алгоритмы. Экспериментальное моделирование производилось с помощью суперкомпьютера (СК) «Сергей Королёв» в Самарском государственном аэрокосмическом университете.

## **Конечно-разностная схема**

Наиболее точное описание электромагнитного поля в среде дает система уравнений Максвелла. Для ее численного решения используется метод FDTD, на котором основано множество различных пакетов, например коммерческий FullWave. Однако, зачастую решение такой системы является очень трудоемким процессом, поэтому используется более простая модель – волновое уравнение, являющееся сутью следствием системы уравнений Максвелла.

Рассмотрим планарный волновод, грани которого выполнены из материала, идеально поглощающего излучение. На вход волновода подается электромагнитный импульс, но в начальный момент времени источник выключен. Запишем математическую модель представленной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} n^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \quad x \in \left( -\frac{l_x}{2}, \frac{l_x}{2} \right), \quad z \in (0, l_z), \quad \tau \in (0, T]; \\ E|_{x=-l_x/2} = E|_{x=l_x/2} = 0, \quad z \in (0, l_z), \quad \tau \in (0, T]; \\ E|_{z=0} = \psi(x, \tau), \quad x \in \left( -\frac{l_x}{2}, \frac{l_x}{2} \right), \quad \tau \in (0, T]; \\ E|_{z=l_z} = 0, \quad x \in \left( -\frac{l_x}{2}, \frac{l_x}{2} \right), \quad \tau \in (0, T]; \\ E|_{\tau=0} = 0, \quad x \in \left[ -\frac{l_x}{2}, \frac{l_x}{2} \right], \quad z \in [0, l_z]; \\ \frac{\partial E}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad x \in \left[ -\frac{l_x}{2}, \frac{l_x}{2} \right], \quad z \in [0, l_z], \end{array} \right.$$

де  $n$  – коэффициент преломления;  $E$  – напряженность электрического поля, В/м;  $x$  и  $z$  – пространственные координаты, мкм;  $\tau$  – аналог времени  $t$ , за которое волна пройдет расстояние  $ct$ , мкм;  $c$  – скорость света, м/с;  $l_x$  и  $l_z$  – ширина и длина волновода соответственно, мкм;  $T$  – время распространения излучения, мкм;  $\psi(x, \tau)$  – напряженность электрического поля на входе в волновод в момент времени  $\tau$ , В/м.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{\tau} \hat{E}_{ij}^k = \frac{1}{n_{ij}^2} \Lambda_x \hat{E}_{ij}^k + \frac{1}{n_{ij}^2} \Lambda_z \hat{E}_{ij}^k, \quad i = \overline{1, I-1}; \quad j = \overline{1, J-1}; \quad k = \overline{1, K-1}; \\ \hat{E}_{ij}^k \Big|_{i=0} = \hat{E}_{ij}^k \Big|_{i=I} = 0, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad k = \overline{2, K}; \\ \hat{E}_{ij}^k \Big|_{j=0} = \hat{\psi}_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{2, K}; \\ \hat{E}_{ij}^k \Big|_{j=J} = 0, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{2, K}; \\ \hat{E}_{ij}^k \Big|_{k=0} = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}; \\ \frac{\hat{E}_{ij}^{k+1} - \hat{E}_{ij}^k}{h_{\tau}} \Big|_{k=0} = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \end{array} \right.$$

Построим на равномерной сетке явную конечно-разностную схему для решения второй краевой задачи:

где  $\hat{E}_{ij}^k$  – сеточная функция, взятая в узле  $(i, j, k)$ ;  $\Lambda \hat{E}_i = \frac{\hat{E}_{i+1} - 2\hat{E}_i + \hat{E}_{i-1}}{h^2}$  – разностный оператор

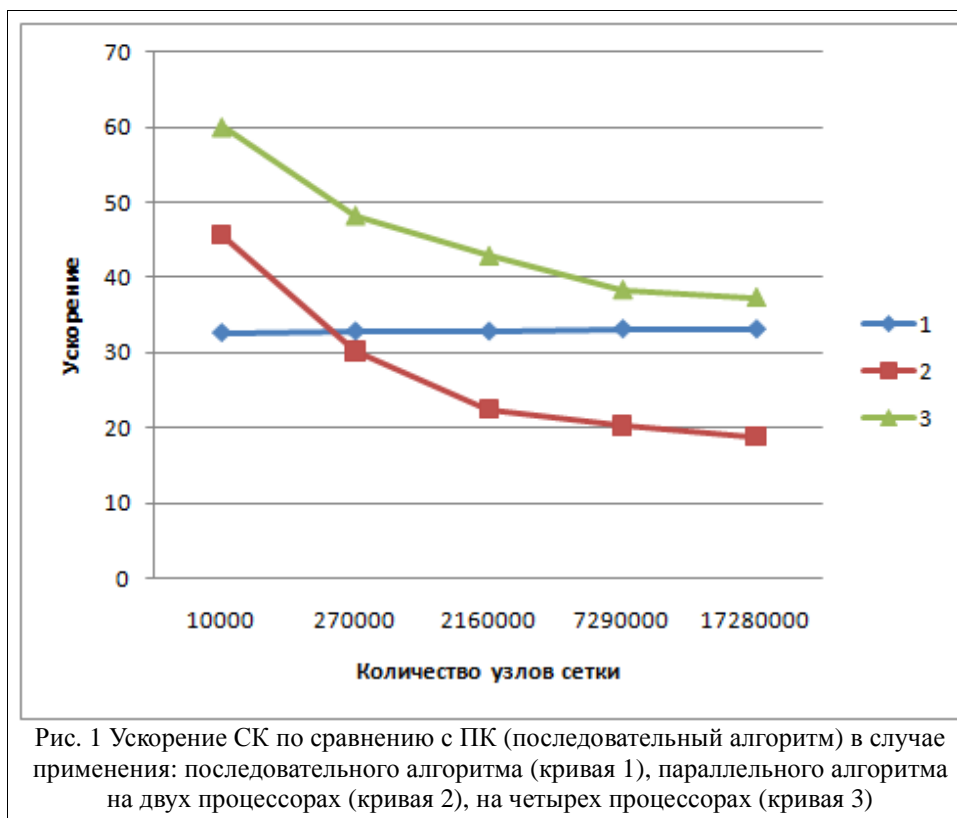
Лапласа;  $I, J, K$  – количество интервалов разбиения по переменным  $x, z, \tau$ ;  $h_x = l_x / I$ ,  $h_z = l_z / J$ ,  $h_{\tau} = T / I$  – шаги аппроксимации.

Представленная конечно-разностная схема (2) обладает вторым порядком аппроксимации по всем шагам дискретизации и является условно сходящейся [3].

#### **Параллельные алгоритмы**

В следствие огромной трудоемкости (десятки миллиардов и более вычислительных операций) для решения задачи были разработаны параллельные алгоритмы расчета. В случае явных схем метод расчета в каждой из ячеек основан на получении результатов расчетов в предыдущий момент времени от смежных ячеек и выполнении вычислений по обработке текущей и смежных ячеек. Для распараллеливания вычислений расчетная область разделяется на несколько подобластей по числу процессоров. При использовании регулярных сеток, топологически эквивалентных индексному прямоугольнику или параллелепипеду, задача декомпозиции решается разбиением области на заданное число подобластей, в каждой из которых содержится одинаковое число узлов, плоскостями, перпендикулярными индексным плоскостям. Подобласти имеют ряд фиктивных ячеек (ghost cell), которые перекрываются с ячейками соседних подобластей и хранят граничные значения соседних блоков. Шаблон разностной схемы определяет, какие и сколько внешних узлов оказываются необходимыми для получения корректного решения. В случае явной схемы используется трехточечный шаблон, в следствие чего для сшивки решений используются функции из одного соседнего узла с каждой стороны. Каждая подобласть обрабатывается одним процессором, а обмен данными между процессорами требуется только при переходе к следующему временному слою. Связь подобластей осуществляется при помощи копирования значений искомым функций в фиктивные ячейки. Таким образом при использовании к примеру 16 процессоров мы получаем 16 нитей, каждая из которых реализуется одним из процессоров и обрабатывает свою подобласть данных.

Ниже приведены результаты исследований для задачи с пространственной зависимостью коэффициента преломления. Для расчета ускорения производились многократные замеры (более 30 замеров) времени работы последовательной и параллельной программы на СК и ПК, при фиксированных параметрах задачи (как физических, например размеры волновода, так и сеточных: размерность сетки). Далее вычислялось среднее арифметическое времени работы программы. За ускорение бралось отношение среднеарифметического времени работы программы на СК к среднеарифметическому времени работы программы на ПК для соответствующего алгоритма (например для последовательной реализации на обеих машинах). Аналогично производился расчет ускорения параллельных алгоритмов по сравнению с последовательным. Однако здесь брались результаты замеров среднего времени выполнения обеих модификаций алгоритма на СК.



Из проведенных экспериментов получено, что СК в разы быстрее производит вычисления. Применение последовательного алгоритма на СК дает ускорение примерно в 32 раза по сравнению с ПК. Данное ускорение связано во-первых с более мощными процессорами на СК, а во-вторых с особенностями настройки компилятора на СК, который позволяет автоматически векторизовать циклы, используемые в коде программы. В случае применения параллельного алгоритма наблюдается падение ускорения в направлении от крупных сеток к мелким, однако оно остается весьма значительным (не менее, чем в 18 раз). Различия в ускорениях для алгоритмов распараллеливания на четыре и два процессора объясняется конфигурацией ПК (на основе Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU, 2Гб оперативной памяти).

Применение параллельного алгоритма для 16ти процессоров в сравнении с последовательным, запущенных на СК, позволили достигнуть ускорения в среднем в 15,6 раз, что соответствует теоретически рассчитанному ускорению.

Следует отметить, что решение представленной задачи на ПК с использованием сеток мельче, чем  $1100 \times 120 \times 120$  отсчетов является проблематичным вследствие нехватки оперативной памяти. Таким образом СК позволяет путем увеличения размерности сетки (т.е. измельчения шага дискретизации) уменьшить погрешность сеточного решения.

#### **Заключение**

Получены следующие результаты:

1. Использование высокопроизводительной техники в сравнении с ПК позволило существенно (в 32 раза для последовательного) уменьшить время расчётов для решения рассматриваемой задачи.
2. Использование параллельного алгоритма на СК позволило уменьшить время расчета по сравнению с ПК с 18 (сравнение алгоритма для 2 процессоров на ПК и для 2 процессоров на СК) до 136 раз (сравнение алгоритма для 2 процессоров на ПК и для 16 процессоров на СК).
3. Использование высокопроизводительной техники позволило также повысить на один-два порядка точность искомого решения за счёт измельчения сетки, задействовав при этом несущественную часть всех мощностей СК.

#### **ЛИТЕРАТУРА:**

1. Неганов, В.А. Линейная макроскопическая электродинамика / В.А. Неганов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой. – М.: Радио и связь, 2000. – Т. 1. – 509с.
2. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А. В. Гулин – М: Научный мир, 2003. – 316 с.
3. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.

4. Ортега Джеймс, М. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / М. Ортега Джеймс. – М.: Мир, 1991. – 364 с.