

# МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ШУМАМИ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ ЛОМОНОСОВ

О.В. Корж, А.Ю. Чернявский, А.А. Корж

## Введение.

Реализуемые на квантовом компьютере алгоритмы позволяют решать некоторые сложные вычислительные задачи существенно быстрее, нежели на классических компьютерах. Так, алгоритм Шора [1] позволяет раскладывать числа на простые множители за полиномиальное время, а алгоритм Гровера [1] позволяет решать любые переборные задачи за время, примерно равное квадратному корню из времени, затрачиваемого на классических компьютерах. Одним из этапов создания квантового компьютера является проведение моделирования квантовых систем на существующих классических компьютерах.

Особенно важно моделирование на основе реальных физических систем с учетом квантового шума, который является основным препятствием на пути реализации квантовых битов (кубитов) и вентилях. Отметим, что с ростом числа кубитов необходимые вычислительные ресурсы растут экспоненциально. В связи с этим фактом для решения многих задач даже с не очень большим числом кубитов невозможно обойтись без использования суперкомпьютеров. Такого рода моделирование относится к классу Data-Intensive задач.

В данной статье рассмотрено моделирование квантового преобразования Фурье с использованием зашумленных гейтов. Проведен анализ влияния шума на точность квантовых вычислений. Эксперименты по моделированию квантовой системе проводились на суперкомпьютере Ломоносов.

## Модель зашумления вентилях

Квантовое преобразование Фурье является квантовым аналогом дискретного преобразования Фурье.

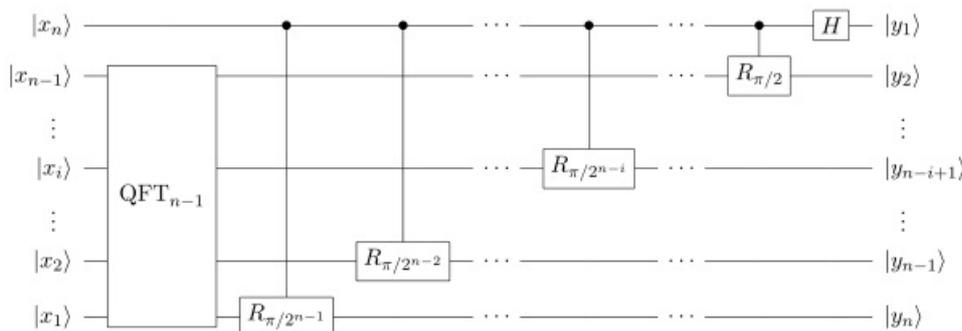


Рис 1. Схема квантового преобразования Фурье .

Это преобразование играет ключевую роль в алгоритме Шора, который позволяет разложить число  $N$  на простые множители за время  $O(\log^2 N \log^3(\log N))$ , что дает экспоненциальный рост скорости относительно наилучшего известного на данный момент классического алгоритма. Кроме того, на основе квантового преобразования

Фурье строятся алгоритмы моделирования квантовых систем на квантовом компьютере. Схема квантового преобразования Фурье приведена на Рис.1.

Для зашумления вентилях была реализована модель, описанная в работе[2]. Зашумленный вентиль Адамара Не определяется следующими формулами:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, H_e = HU(\theta), U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta = e\xi, \xi \sim N(0,1)$$

где  $e$  — уровень ошибки,  $N(0,1)$  — нормальная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией.

Зашумленное фазовое преобразование:

$$R_{ije} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(\frac{2\pi i}{2^{j-i}} + ie\xi\right) \end{pmatrix}$$

Для генерации нормальной случайной величины использован подход, описанный в [3]. Приведен код преобразования случайной величины с равномерным распределением к нормальному распределению (Листинг 1).

```
double normal_dis_gen()
{
    double S = 0.;
    for (int i = 0; i<12; i++) { S += (double)rand()/RAND_MAX; }
    return S/2.0-3.0;
}
```

**Листинг 1.** Преобразование случайной величины к нормальному виду.

### Результаты эксперимента на суперкомпьютере Ломоносов

Параллельная версия квантового преобразования Фурье была реализована с помощью модели активных сообщений, реализованной в библиотеке DISLIB[4]. Подробности реализации описаны в работе [5]. Так же реализована модель зашумления вентилях описанная выше.

Моделирование проводилось для различного числа кубитов на различном количестве процессоров. Максимально использовалось 8192 ядра, на которых выполнялось моделирование 37 кубитов. В качестве меры точности выбрана вероятность совпадения F(Fidelity) между идеальным и зашумленным векторами состояний. В качестве меры потери точности использовалась 1-F. Такой подход был ранее применен в работе [2].

На Рис.2 приведены результаты моделирования на суперкомпьютере Ломоносов. Для 37 кубитов статистика построена по результатам 90 запусков, 34 кубита — 60 запусков, 31 и 28 кубитов — 200 запусков.

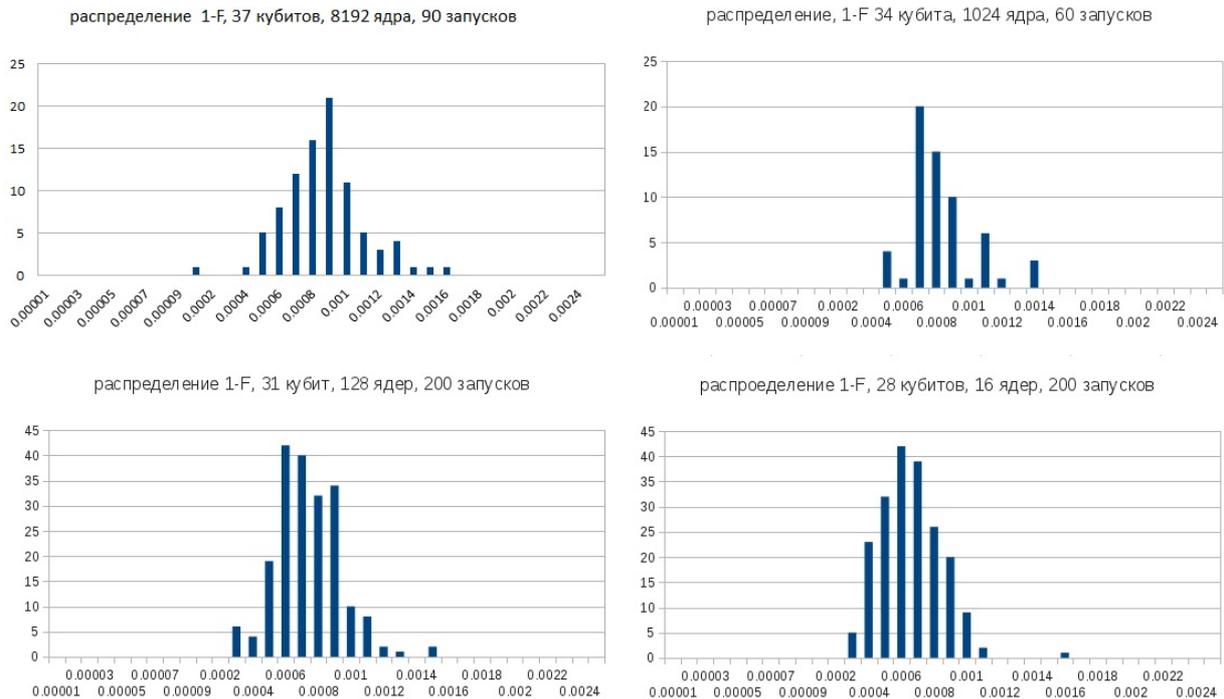


Рис 2. Распределение потерь точности 1-F для алгоритма квантового преобразования Фурье с различным числом кубитов. Точность  $\epsilon=0.01$

В Таблице 1 приведены значения средних потерь для различного числа кубитов.

Таблица 1. Результаты моделирования зашумленного квантового преобразования Фурье.

Количество кубитов	Количество ядер	Средние потери точности
28	16	0.00070762
31	128	0.00079261
32	256	0.00082287
34	1024	0.00088478
37	8192	0.00090877

Как видно из таблицы, потери точности увеличиваются в среднем с увеличением числа кубитов. На Рис.3 показано сравнение аппроксимаций 1-F б-сплайнами для различного количества кубитов.

сравнение аппроксимаций распределения 1-F для разного количества кубитов

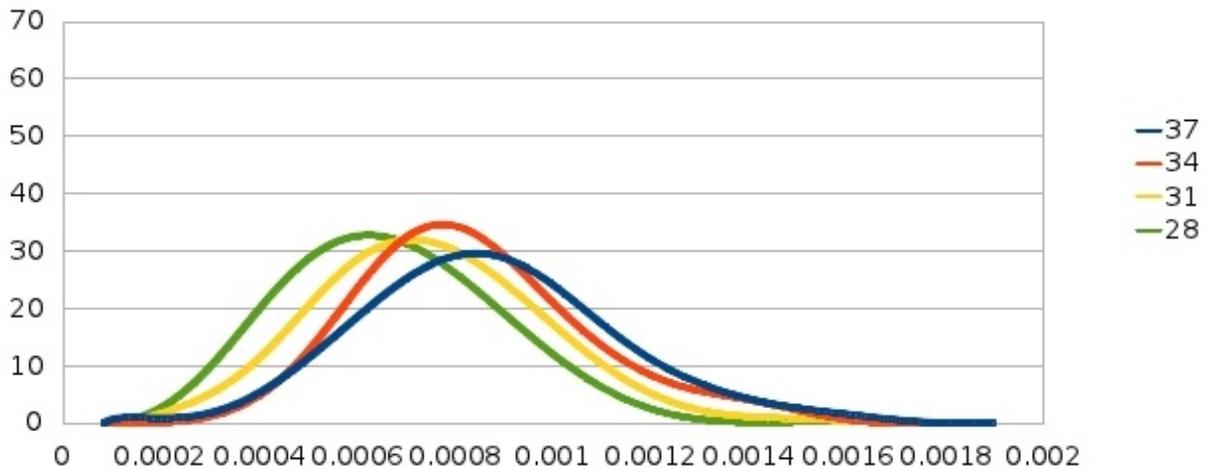


Рис 3. Сравнение аппроксимаций 1-F б-сплайнами для различного количества кубитов

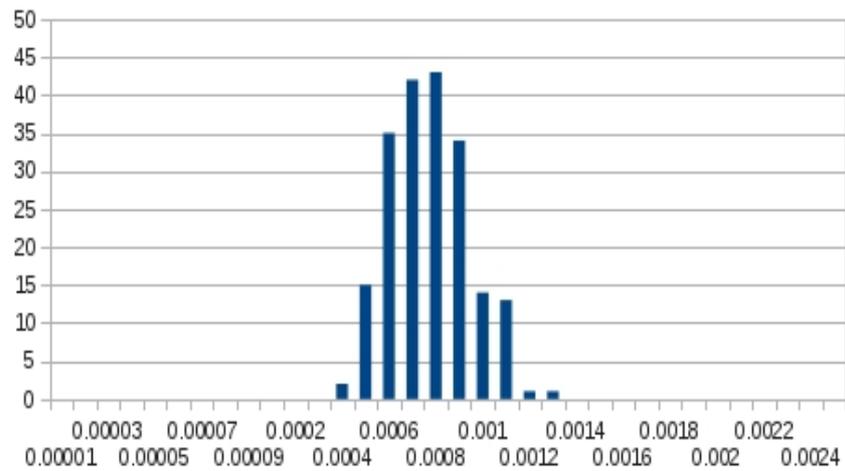
В Таблице 2 приведено среднее время работы алгоритма для различного числа кубитов. Количество процессоров бралось минимальным с условием, что задача помещалась в память.

Таблица 2. Время работы зашумленного квантового преобразования Фурье.

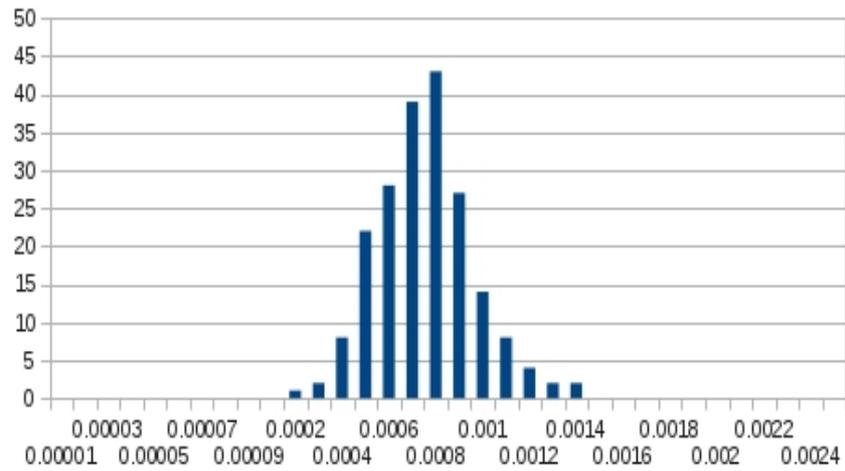
Количество кубитов	Количество ядер	Среднее время работы (сек)
28	16	61
31	128	71
32	256	81
34	1024	112
37	8192	323

На Рис.4. показаны результаты моделирования для фиксированного количества кубитов (32) и различного количества процессоров.

распределение 1-F, 32 кубита, 256 ядер, 200 запусков



распределение 1-F, 32 кубита, 512 ядер, 200 запусков



распределение 1-F, 32 кубита, 1024 ядра, 200 запусков

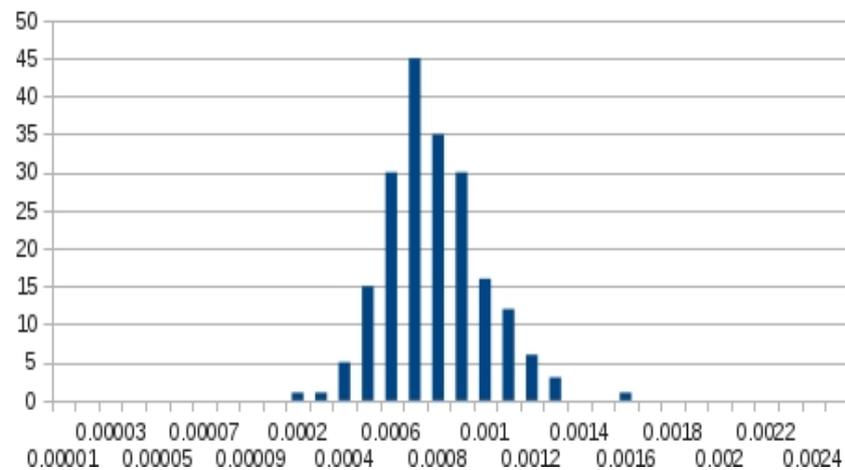
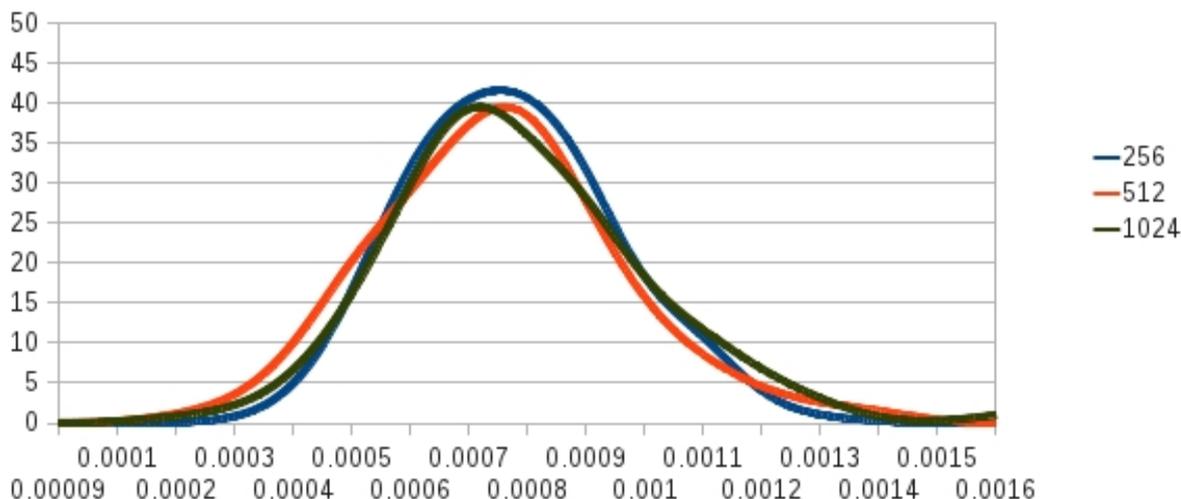


Рис. 4. Распределение потерь точности 1-F для алгоритма квантового преобразования Фурье с различным количеством процессоров. Точность  $\epsilon=0.01$

аппроксимация распределения 1-F при разном количестве ядер,  
32 кубита, 200 запусков



На Рис.5 показано сравнение аппроксимаций 1-F б-сплайнами для различного количества процессоров

В Таблице 3 приведены значения средних потерь для 32 кубитов при расчёта на разном количестве процессоров.

Таблица 3. Результаты моделирования зашумленного квантового преобразования Фурье.

Количество кубитов	Количество ядер	Средние потери точности
32	256	0.00082287
32	512	0.00080265
32	1024	0.00083367

В Таблице 4 приведено среднее время работы алгоритма для различного числа процессоров и фиксированного количества кубитов.

Таблица 4. Время работы зашумленного квантового преобразования Фурье для фиксированного размера задачи (32 кубита) и разного количества процессоров.

Количество ядер	Среднее время работы (сек)
256	81
512	42
1024	22

Как видно из Таблиц 2 и 4 получена хорошая сильная и слабая масштабируемость разработанной параллельной программы.

**Заключение**

В работе представлены результаты моделирования зашумленного квантового преобразования Фурье на суперкомпьютере Ломоносов. Показано, что распределение потерь точности близко у нормальному. Так же показано, что точность в среднем уменьшается при увеличении количества кубитов. Изменение количества процессоров при фиксированном количестве кубитов в среднем не влияет на точность. Проведено моделирование квантового преобразования Фурье с зашумленными вентилями для 37 кубитов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 11-07-00756, 12-07-31229, 12-01-31274). Авторы выражают благодарность сотрудникам лаборатории физики квантовых компьютеров ФТИАН за плодотворное обсуждение вопросов, связанных с тематикой работы.

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Ожигов Ю.И. Квантовые вычисления. М.: Макс Пресс, 2003.
2. Ю.И. Богданов, Н.А. Богданова, В.Ф. Лукичев, А.А. Орликовский, И.А. Семенихин,

3. А.С. Холево , А.Ю. Чернявский Математическое моделирование влияния квантовых шумов на точность реализации квантовых алгоритмов // International Conference "Parallel and Distributed Computing Systems" PDCS 2013 (Ukraine, Kharkiv, March 13-14, 2013) , сс. 50-57
4. Дональд Кнут. Искусство программирования. Глава 3.3. Спектральный критерий
5. Корж А.А. Масштабирование Data-Intensive приложений с помощью библиотеки DISLIB на суперкомпьютерах Blue Gene/P и “Ломоносов” // Тр. конф. “Научный сервис в сети Интернет-2011”. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2011. 126–131.
6. Корж О.В., Андреев Д.Ю., Корж А.А., Коробков С.В., Чернявский А.Ю. Моделирование работы идеального квантового компьютера на суперкомпьютере "Ломоносов" // жур. Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14 , сс.24-34