ОЦЕНКА КОММУНИКАЦИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ФРАГМЕНТИРОВАННОГО ОТНОШЕНИЯ

М.В. Губин

Фрагментный параллелизм [1, 2] продолжает оставаться основной формой параллелизма в системах баз данных для многопроцессорных платформ с распределенной памятью. Фрагментный параллелизм предполагает разделение каждого отношения на части, называемые фрагментами, каждая из которых располагается на отдельном узле параллельной системы баз данных с архитектурой без совместного использования ресурсов [3]. Для разделения отношения на фрагменты используется *функция фрагментации* [4], отображающая множество кортежей отношения на множество узлов. Известно, что при использовании фрагментного параллелизма при обработке запросов в общем случае не удается избежать пересылок. При обработке фрагментированного отношения для организации пересылок кортежей используется *функция пересылки* (*распределения*) [4], которая для каждого кортежа вычисляет номер узла, на котором он должен быть обработан. Если этот номер не совпадает с номером хранения кортежа, кортеж пересылается.

Пересылки являются одной из самых затратных операций в параллельных системах баз данных без совместного использования ресурсов. В соответствии с этим является важным вопрос оценки количества пересылаемых кортежей [5]. В статье рассматривается теорема, позволяющая получить такую оценку для случая, когда функция пересылки функционально зависит от атрибута, значения которого распределены равномерно относительно атрибута фрагментации. Для случая неравномерного распределения значений атрибута пересылки относительно атрибута фрагментации определена верхняя граница количества пересылаемых кортежей.

Рассмотрим фрагментированное отношение R. Пусть $|R| = m$ – количество кортежей в R. Пусть отношение R разбито на k фрагментов с помощью *функции фрагментации* φ: $R \to \{0, 1, 2, ..., k-1\}$. Тогда фрагмент отношения R, хранящийся на j-том узле может быть определен следующим образом:

$R_j = \{r | r \in R, \varphi(r) = j\}$.

Лемма 1. Пусть для отношения R задана функция фрагментации φ: $R \to \{0, 1, 2, ..., k-1\}$. Допустим, что существует взаимно-однозначное отображение γ: $R \to \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ такое, что

$$\gamma(r) \, mod \, k = \varphi(r), \; \forall \; r \in R. \tag{1}$$

Тогда размеры фрагментов R_0, ..., R_k будут между собой *примерно равны*, то есть:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|R_i|}{|R_j|} = 1, \;\; \forall \; i, j \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}. \tag{2}$$

В доказательство справедливости леммы можно отметить, что γ является взаимно-однозначным отображением на множество неотрицательных целых чисел. Тогда, согласно выражения (1), получим $|R_i| - |R_j| \le 1$ для любого $i, j \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$, т. е. примерно равные фрагменты.

Определение 1. Пусть задана функция фрагментации φ: $R(A_1, ..., A_n) \to \{0, 1, 2, ..., k-1\}$. Будем говорить, что φ *функционально зависит* от атрибута A_i $(0 < i \le n)$, если для любых $r, r' \in R$ таких, что $\pi_{A_i}(r) = \pi_{A_i}(r')$, имеем $\varphi(r) = \varphi(r')$.

Определение 2. Пусть имеется отношение $R(..., A, ...)$. Пусть D_A – множество всех значений атрибута A, присутствующих в R. Обозначим через $T(R, A, a)$ количество кортежей в отношении R, у которых атрибут A принимает значение a. Будем говорить, что значения атрибута A *равномерно распределены* в R, если для любых $a, a' \in D_A$, имеем $T(R, A, a) = T(R, A, a')$.

Лемма 2. Пусть значения атрибута A равномерно распределены в $R(..., A, ...)$, $m = |R|$ кратно $V(R, A)$, а $V(R, A)$ кратно $k > 0$. Тогда существует функционально зависящая от A функция фрагментации φ, которая обеспечивает равномерное распределение кортежей по фрагментам:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|R_i|}{|R_j|} = 1, \;\; \forall \; i, j \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}. \tag{3}$$

Для доказательства леммы необходимо построить функцию фрагментацию φ, которая обеспечивает равномерное распределение кортежей по фрагментам и функционально завит от A.

Выполним сортировку кортежей R в порядке возрастания значений в атрибуте A:

$R = \{r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}\}$, где $\pi_A(r_i) \le \pi_A(r_{i+1})$ для всех $i = \{0, 1, \ldots, m-2\}$.

Пусть i – порядковый номер кортежа в отношении R. Определим функцию γ

$$\gamma(i) = \lfloor \frac{i}{m/k} \rfloor + \left(i \, mod \, \frac{m}{k}\right) k, \; \forall \; i \geqslant 0, \tag{4}$$

которая является взаимно-однозначным отображением множества порядковых номеров кортежей R в множество $\{0, 1, ..., m–1\}$. Для доказательства взаимно-однозначности необходимо показать, что

$0 \leq \gamma(i) \leq m–1, \forall i \in \{0, \dots, m–1\}$

и $\gamma^{-1}(\gamma(i)) = i$.

Утверждение $0 \leq \gamma(i) \leq m–1$ несложно проверить поиском минимального и максимального значения принимаемого функцией γ при $i \in \{0, \dots, m–1\}$. Для доказательства существования обратной функции γ^{-1} напишем её:

$$\gamma^{-1}(j) = \lfloor \frac{j}{k} \rfloor + (j \bmod k)\frac{m}{k}. \tag{5}$$

Подставляя выражение (4) в выражение (5), мы получаем справедливость утверждения $\gamma^{-1}(\gamma(i)) = i$.

Поскольку функция γ существует и является взаимно-однозначным отображением в множество $\{0, 1, ..., m–1\}$, тогда, согласно лемме 1, функция φ обеспечивает равномерное распределение кортежей по фрагментам.

Принимаем функцию фрагментации

$$\varphi(r) = \gamma(r) \bmod k. \tag{6}$$

Для доказательства того, что φ функционально зависит от A, необходимо доказать, что если $\pi_A(r) \leq \pi_A(r')$, то $\varphi(r) = \varphi(r')$ для $\forall r, r' \in R$.

Поскольку мы упорядочили кортежи в R, то можем представить множество R в виде упорядоченных подмножеств $R=\{G_0, G_1, \dots, G_{V(R, A)-1}\}$. По условию леммы значения в атрибуте A распределены равномерно, тогда, согласно определению 2, имеем $T(G_0) = T(G_1) = \dots = T(G_{V(R, A)-1})$.

По условию леммы $V(R, A)$ кратно k, тогда любое подмножество G будет принадлежать только одному фрагменту множества R, т. е. если $G_u \subset R_i$, тогда $G_u \cap R_j = \varnothing$ для $\forall u \in \{0, \dots, V(R,A)–1\}$, $\forall i, j \in \{0, \dots, k–1\}$, $i \neq j$. Из этого понятно, что если $\pi_A(r) \leq \pi_A(r')$, то $\varphi(r) = \varphi(r')$ для $\forall r, r' \in R$. И по определению 2, φ функционально зависит A.

Определение 3. Пусть имеется отношение $R(A, B, ...)$. Пусть $D_A = \{a_0, \dots, a_{V(R,A)-1}\}$ – множество всех значений атрибута A, присутствующих в R. Обозначим $R_u^A = \sigma_{A=a_u}(R)$, $u \in \{0, \dots, V(R,A)–1\}$. Пусть $D_B=\{b_0, \dots, b_{V(R,B)-1}\}$ – множество всех значений атрибута B, присутствующих в R. Будем говорить, что значения атрибута *B распределены равномерно относительно атрибута A*, если для любого $b \in D_B$ имеем

$$T(R_0^A, B, b) = T(R_1^A, B, b) = \ldots = T(R_{V(R,A)-1}^A, B, b).$$

Теорема 1. Пусть имеется отношение $R(A, B, ...)$, в котором значения атрибута A распределены равномерно, а значения атрибута B, в свою очередь, распределены равномерно относительно атрибута A. Положим $m = |R|$. Пусть m кратно $V(R, A)$, а $V(R, A)$ кратно k, где k – количество фрагментов, на которое необходимо разбить R ($k > 0$). Тогда существует функция фрагментации φ, функционально зависящая от атрибута A, такая, что для любой функции пересылки ψ, функционально зависящей от атрибута B, количество пересылаемых кортежей равно $(1–1/k)m$.

Доказательство. Выберем в качестве функции фрагментации φ такую функцию, функционально зависящую от атрибута A, которая обеспечивает равномерное распределение кортежей по фрагментам. Такая функция существует в силу леммы 2. Обозначим через R_j j-тый фрагмент отношения R:

$R_j = \{r | r \in R, \varphi(r) = j\}$.

Пусть $D_A = \{a_0, \dots, a_{V(R,A)-1}\}$ – множество всех значений атрибута A, присутствующих в R. Обозначим $R_u^A = \sigma_{A=a_u}(R)$, $u \in \{0, \dots, V(R,A)–1\}$. Так как по условию теоремы значения атрибута A распределены равномерно в R, имеем

$$R_u^A = \frac{m}{V(R, A)}.$$

Поскольку функция фрагментации φ функционально завит от A, то

$$\forall\ u \in \{0, \dots, V(R, A) - 1\}\ \ \exists\ j \in \{0, \dots, k-1\}:\ R_u^A \subset R_j.$$

В силу того, что φ обеспечивает равномерное распределение кортежей по фрагментам, отсюда следует, что мы можем перенумеровать элементы множества $\{R_u^A |\ u \in \{0, \dots, V(R, A) - 1\}\}$ таким образом, что

$$R_j = \bigcup_{u=\frac{V(R,A)}{k}j}^{\frac{V(R,A)}{k}(j+1)-1} R_u^A, \quad j = \{0, \dots, k-1\}. \tag{7}$$

Причем

$$\forall\ u\neq v:\ \ R_u^A \cap R_v^A = \varnothing\ ,\tag{8}$$

и

$$\forall\ j\in\{0,\dots,k-1\}\ \ \forall\ u\in\{0,\dots,V(R,A)-1\}:\ |R_j| = \frac{V(R,A)}{k}|R_u^A|.\tag{9}$$

По условию теоремы значения атрибута *B* распределены равномерно относительно *A*, тогда из определения 3 следует, что

$$|\sigma_{B=b}(R_0^A)| = |\sigma_{B=b}(R_1^A)| = \dots = |\sigma_{B=b}(R_{V(R,A)-1}^A)|,\ \ \forall\ b\in D_B.\tag{10}$$

Отсюда и из (7)-(9) следует

$$|\sigma_{B=b}(R_0)| = |\sigma_{B=b}(R_1)| = \dots = |\sigma_{B=b}(R_{k-1})|,\ \ \forall\ b\in D_B\ .\tag{11}$$

Пусть $D_B = \{b_0, \dots, b_{V(R,B)-1}\}$ – множество всех значений атрибута *B,* присутствующих в *R.* По условию теоремы функция пересылки ψ функционально зависит от атрибута *B*, следовательно, существует функция ψ': $D_B \to \{0, \dots, k-1\}$ такая, что

$$\forall\ r\in R:\ \ \psi(r) = \psi'(r.B).$$

Обозначим

$$R_v^B = \sigma_{B=b_v}(R),\ \ v = \{0,\dots,V(R,B)-1\}.$$

Тогда имеем

$$R = \bigcup_{0\leqslant v<V(R,B)} R_v^B,\tag{12}$$

причем,

$$\forall\ v\neq v':\ \ R_v^B \cap R_{v'}^B = \varnothing\ .\tag{13}$$

В результате получаем

$$\forall\ r\in R_v^B:\ \ \psi(r) = \psi'(b_v).\tag{14}$$

Это означает, что кортежи множества $\sigma_{B=b_v}(R_{\psi'(b_v)})$ пересылаться не будут. Учитывая (11), заключаем, что из множества R_v^B пересылке не подвергнутся в точности $|\sigma_{B=b_v}(R_0)|$ кортежей. Используя (12) и (13), отсюда получаем, что количество кортежей из *R*, которые не подвергнутся пересылке, равно

$$\sum_{v=0}^{V(R,B)-1} |\sigma_{B=b_v}(R_0)| = |R_0|.\tag{15}$$

В силу того, что φ обеспечивает равномерное распределение кортежей по фрагментам, имеем $|\ R_0\ | = m/k$. Отсюда следует, что количество пересылаемых кортежей равно

$$m - \frac{m}{k} = (1-\frac{1}{k})m.\tag{16}$$

Теорема доказана.

Определение 4. Пусть имеется отношение $R(\dots, B, \dots)$. Пусть $D_B = \{b_1, \dots, b_{V(R,B)}\}$ – множество всех значений атрибута *B*, присутствующих в *R*. Обозначим через $T(R, B, b_v)$ количество кортежей в отношении *R*, у которых атрибут *B* принимает значение b_v, $v \in \{1, \dots, V(R,B)\}$. Будем говорить, что значения атрибута *B* *распределены по закону* ρ в *R*, если для любых $b_v \in D_B$, существует перенумерация, такая что

$$|\rho_v \frac{m}{V(R,B)} - T(R,B,b_v)| \leqslant 1\ ,\ v\in\{1,\dots,V(R,B)\},\tag{17}$$

где

$$\rho_v = \frac{V(R,B)}{v H_n},\tag{18}$$

H_n – гармоническое число [6]:

$$H_n = \sum_{j=1}^{V(R,B)} \frac{1}{j}.\tag{18}$$

Определение 5. Пусть имеется отношение $R(A, B, \ldots)$, $|R| = m$. Пусть $D_A = \{a_1, \ldots, a_{V(R,A)}\}$ – множество всех значений атрибута A, присутствующих в R. Обозначим $R_u^A = \sigma_{A=a_u}(R)$, $u \in \{1, \ldots, V(R,A)\}$. Пусть $D_B=\{b_1, \ldots, b_{V(R,B)}\}$ – множество всех значений атрибута B, присутствующих в R. Будем говорить, что значения атрибута *B распределены по закону* ρ *относительно атрибута A*, если для любого $b_v \in D_B$ существует такая перенумерация, что

$$\left|\rho_{v,u}\frac{m}{V(R,B)} - T\left(R_u^A, B, b_v\right)\right| \leqslant 1, u \in \{1, \ldots, V(R,A)\}, v \in \{1, \ldots, V(R,B)\} \tag{19}$$

где

$$\rho_{v,u} = \frac{V(R,B)}{v H_n V(R,A)}. \tag{20}$$

Теорема 2. Пусть имеется отношение $R(A, B, \ldots)$ $m = |R|$, в котором значения атрибута A распределены равномерно, а значения атрибута B, в свою очередь, распределены по закону $\rho_{v,u}$ относительно атрибута A, $u \in \{1, \ldots, V(R,A)\}$ и $v \in \{1, \ldots, V(R,B)\}$. Тогда существует функция фрагментации φ, функционально зависящая от атрибута A, такая, что для любой функции пересылки ψ, функционально зависящей от атрибута B, количество пересылаемых кортежей Q ограничено

$$m - \frac{m}{V(R,B)} \sum_{u=1}^{V(R,A)} \min_{0 < v \leqslant V(R,B)} \left(\rho_{v,u}\right) \geqslant Q. \tag{21}$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. E. Rahm Parallel Query Processing in Shared Disk Database Systems // ACM SIGMOD Record, 1993. Vol. 22, No. 4. P. 32-37.
2. Л.Б. Соколинский Параллельные системы баз данных: Учебное пособие / М.: Издательство Московского университета, 2013. – 184 с.
3. Л.Б. Соколинский Обзор архитектур параллельных систем баз данных // Программирование. 2004 г., No. 6. с. 49-63.
4. А.В. Лепихов, Л.Б. Соколинский Обработка запросов в СУБД для кластерных систем // Программирование. 2010 г. № 4. с. 25-39.
5. W. Hasan, R. Motwani Coloring Away Communication in Parallel Query Optimization // VLDB'95, Proceedings of 21th International Conference on Very Large Data Bases, September 11–15, 1995, Zurich, Switzerland. Morgan Kaufmann. 1995. P. 239–250.
6. Д.Э. Кнут Искусство программирования, т.1. Основные алгоритмы. М.: Издательский дом "Вильямс", 2000г., с.720.