

УСВОЕНИЕ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ В ПОЛУЛАГРАНЖЕВОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СУПЕРКОМПЬЮТЕРОВ

Н.Н. Богословский

Введение

В настоящее время основой для составления прогноза погоды являются численные расчеты метеорологических величин, проводимые с использованием математических моделей. Совершенствование и улучшение математических моделей является важнейшей задачей. Одной из оперативных глобальных моделей среднесрочного прогноза погоды ГУ «Гидрометцентр России» является глобальная полулагранжева модель атмосферы ПЛАВ (полулагранжева, основанная на уравнении абсолютной завихренности). Данная модель включает в себя математические уравнения, описывающие физические процессы в атмосфере и их свойства и характер их изменения со временем. В модели так же используются параметризации подсеточного масштаба, для описания физических процессов не воспроизводимых при используемой пространственной сетке.

В модели ПЛАВ реализована параметризация тепло и влагообмена между поверхностью суши и атмосферой ISBA. Данная параметризация чувствительна к заданию начальных значений для температуры и влажности почвы. Важность точного задания почвенных переменных показали в Европейском центре среднесрочных прогнозов на примере чувствительности 72 часовых прогнозов к ошибкам в начальных полях почвенных переменных. Ошибки в задании влажности почвы, согласно этой работе, оказывают значительное влияние на качество краткосрочного и среднесрочного численного прогноза погоды и даже оказывают влияние на сезонные прогнозы. Для улучшения качества задания начальных полей почвенных переменных реализовано вариационное усвоение данных наблюдений наземных станций и усвоение спутниковых данных влажности поверхностного слоя почвы на основе оптимальной интерполяции. Проведено распараллеливание алгоритмов для возможности их применения в задачах оперативного численного прогноза погоды.

1. Постановка задачи вариационного усвоения данных наблюдений приземной температуры

Обозначим через D всю поверхность сферы. $\xi = (\lambda, \theta) \in D$ где λ, θ - географическая долгота и широта соответственно. $V = D \times [0, 1]$ - область в которой ищется решение. Пусть даны уравнения описывающие динамику атмосферы, с периодическими граничными условиями по долготе, а так же параметризации процессов подсеточного масштаба. Запишем данную математическую модель в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} + M(x) = 0, t \in (0, \tau) \\ x(0) = \Phi \end{cases} \quad (1)$$

где $x = x(\xi, \sigma, t)$ это вектор-функция неизвестных, M - нелинейный модельный оператор (часто $M(x)$ обозначает общий модельный оператор, но в данном случаи частная производная по времени записано отдельно), Φ - известная вектор функция начальных значений.

Пусть нам известны все начальные значения в момент времени $t=0$ кроме температуры воздуха на уровне 2 метра (T_{2m}), которая неизвестна или известна с некоторой погрешностью

$$T_{2m}(0) = T_{2m}^b + \varepsilon_b \quad (2)$$

где T_{2m}^b - известная функция поля первого приближения температуры на уровне 2 метров, ε_b - ошибка поля первого приближения.

Предположим что недостаток информации о начальном поле температуры воздуха на уровне 2 метров можно дополнить за счет данных измерений y , имеющих на интервале времени $t_0 \leq t \leq \tau$, называемым окном усвоения:

$$y = H(T_{2m}) + \varepsilon_o \quad (3)$$

где ε_o - ошибки наблюдений, H - это оператор наблюдений, с помощью которого вычисляется модельный эквивалент наблюдению y .

Сформулируем следующую задачу. Найти такое начальное поле температуры $T_{2m}(\xi, 0) = T_{2m}^a(\xi)$ (далее анализ температуры), при котором прогностическая модель (1) генерирует решение минимально отклоняющиеся от данных наблюдений y и минимизирующее ошибки в (2-3).

Предположение 1: ошибки поля первого приближения и наблюдений не коррелируют между собой, т.е. независимы.

Используя Предположение 1, введем в рассмотрение следующий функционал

$$J(T_{2m}^a, x) = \frac{1}{2} \int_D \int_D (T_{2m}^a(\xi') - T_{2m}^b(\xi')) B^{-1}(\xi', \xi) (T_{2m}^a(\xi) - T_{2m}^b(\xi)) d\xi d\xi' + \frac{1}{2} \int_D \int_0^\tau \int_D \int_0^\tau [y(\xi', t') - H(T_{2m}(\xi', t')) R^{-1}(\xi', t', \xi, t) \times (y(\xi, t) - H(T_{2m}(\xi, t)))] d\xi dt d\xi' dt' \quad (4)$$

где B, R - симметричные и положительные ковариационные функции ошибок $\varepsilon_b, \varepsilon_o$; T_{2m} - один из компонентов вектор-функции x ; $y = y(t)$ - данные наблюдений, предполагается, что данная функция является достаточно гладкой; H - линейный оператор наблюдения.

Двойное интегрирование по пространству и времени необходимо для выражения всех всевозможных корреляций между ошибками в точках (ξ, t) и (ξ', t') .

Задача вариационного усвоения данных может быть сформулирована следующим образом: найти решение x задачи (1) и функцию T_{2m}^a такие, что на них функционал (4) принимает наименьшее значение.

Математически данную задачу можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} + M(x) = 0, t \in (0, \tau) \\ x^*(0) = \Phi^* \\ T_{2m}^a(0) = T_{2m}^o \\ J(T_{2m}^a, x) = \inf_{T_{2m}^o \in X} J(T_{2m}^o, x) \end{cases}$$

Для решения данной задачи применяются методы вариационного анализа. Продолжим описание вариационного алгоритма усвоения данных наблюдений приземной температуры, используя дискретную формулировку, в которой он наиболее часто встречается. Замена всех непрерывных функций на их дискретный аналог (вектор-столбец) на некоторой сетке, ковариационных функций на матрицы и линейного оператора на соответствующую ему матрицу приводит к следующей формулировке стоимостного функционала

$$J(T_{2m}^{\vec{a}}) = \frac{1}{2} (T_{2m}^{\vec{a}} - T_{2m}^{\vec{b}})^T B^{-1} (T_{2m}^{\vec{a}} - T_{2m}^{\vec{b}}) + \frac{1}{2} (\vec{y} - H T_{2m}^{\vec{a}})^T R^{-1} (\vec{y} - H T_{2m}^{\vec{a}}) \quad (5)$$

где $T_{2m}^{\vec{a}}$ - вектор-столбец сеточных значений контрольной переменной размерности N . Хотя в модели приземная температура записывается в виде поля, для анализа она представляется в виде вектора всех сеточных значений. B - ковариационная матрица ошибок поля первого приближения приземной температуры размерности $N \times N$. Для ее задания на сфере использовалась функция предложенная в работе и ее модификация предложенная в работе. \vec{y} - вектор наблюдений приземной температуры размерности K .

R - ковариационная матрица ошибок наблюдений, предполагаем что наблюдения в разных точках не коррелируют, поэтому матрица R имеет диагональный вид; H - матрица линейного оператора наблюдений.

В дискретном случаи, решения задачи вариационного усвоения заключается в нахождение глобального минимума функционала (5). Представим функционал (5) в следующем виде

$$J(T_{2m}^{\vec{a}}) = \frac{1}{2} (\vec{T}_{2m}^{\vec{a}} - \vec{T}_{2m}^{\vec{b}})^T B^{-1} (\vec{T}_{2m}^{\vec{a}} - \vec{T}_{2m}^{\vec{b}}) + \frac{1}{2} (\vec{d} - H (\vec{T}_{2m}^{\vec{a}} - \vec{T}_{2m}^{\vec{b}}))^T R^{-1} (\vec{d} - H (\vec{T}_{2m}^{\vec{a}} - \vec{T}_{2m}^{\vec{b}}))$$

где $\vec{d} = \vec{y} - H \vec{T}_{2m}^{\vec{b}}$ - инновационный вектор. Так как данный функционал является квадратичным положительно определенным, то необходимым и достаточным условием существования минимума в точке $T_{2m}^{\vec{a}}$ является равенство нулю его градиента, которые имеет следующий вид.

$$\nabla J(T_{2m}^{\vec{a}}) = B^{-1} (\vec{T}_{2m}^{\vec{a}} - \vec{T}_{2m}^{\vec{b}}) + H^T R^{-1} (\vec{d} - H (\vec{T}_{2m}^{\vec{a}} - \vec{T}_{2m}^{\vec{b}}))$$

Если приравнять градиент к нулю, то получим систему линейных алгебраических уравнений большой размерности. Данную систему можно решать явными методами, но наиболее эффективными методами решения таких систем, являются итерационные методы. Для решения задачи нахождения минимума квадратичного функционала (5) применялся метод сопряженных векторов с ортогонализацией для задач большой размерности.

2. Усвоение спутниковых данных измерений влажности поверхностного слоя почвы

Разработано несколько космических систем дистанционного зондирования, работающие на сверхвысоких частотах. Данные системы позволяют получить распределение поверхностной влажности почвы, например, ASCAT и SMOS. Использование этих данных дистанционного спутникового зондирования является очень привлекательным и перспективным, так как они обеспечивают глобальное покрытие данными измерений и обладают хорошим горизонтальным разрешением сопоставимым с горизонтальным разрешением модели численного прогноза погоды ПЛАВ.

Для тестирования системы усвоения и проведения исследований был получен доступ к данным спутниковых измерений ASCAT (Advanced Scatterometer) предоставляемый Венским техническим университетом, Факультетом геодезии и геоинформационных технологий, исследовательской группой фотограмметрии и дистанционного зондирования (<http://www.ipf.tuwien.ac.at/>).

Измерения ASCAT – это измерения которые производятся с использованием улучшенного скаттерометра (Advanced Scatterometer) установленного на спутнике MetOp. Прибор ASCAT позволяет получить измерения с разрешением приблизительно равным 50 км. Одним из продуктов, получаемым по измерениям данного прибора, является влажность поверхностного слоя почвы, которая отражает степень насыщения самого верхнего слоя почвы (слой не более 5 см) и задается в процентах, от 0 (сухая почва) до 100 (влажная почва). В численной модели прогноза ПЛАВ влагосодержание почвы выражается объемной характеристикой m^3/m^3 . Поэтому перед усвоением данных влажности почвы ASCAT они должны быть преобразованы в объемную влажность поверхностного слоя почвы.

Для того, чтобы проверить целесообразность использования спутниковых данных измерений для инициализации почвенных переменных и оценить эффект от использования этих данных в системе усвоения, была использована упрощенная схема усвоения, основанная на оптимальной интерполяции. Усвоение для каждой точки расчетной сетки производится не зависимо от других. Пусть ошибки наблюдений и ошибки поля первого приближения не коррелируют между собой. Тогда можно записать следующие уравнение для нахождения поля анализа влагосодержания поверхностного слоя почвы:

$$\Theta_a = \Theta_b + K(\Theta_{scat} - \Theta_b)$$

где Θ_a – искомое влагосодержание поверхностного слоя почвы, которое будет использоваться в качестве начального условия в модели; Θ_{scat} – влагосодержание поверхностного слоя почвы по данным спутниковых измерений в точке наиболее близкой к точке сетки, в которой проводится расчет; Θ_b – значение первого приближения для влагосодержания поверхностного слоя почвы в точке сетки, в которой производится расчет (как правило, в качестве первого приближения, берется прогноз по модели на срок 6 часов, которые был сделан 6 часов назад); K – константа, которая не зависит от пространства и времени.

Для проведения усвоения спутниковых данных используется следующие выражение для расчета поля анализа влагосодержания слоя почвы.

$$\Theta_{a,l} = \begin{cases} \Theta_{b,1} + 0.5 * F_1 * F_2 (\Theta_{scat} - \Theta_b), & l=1 \\ \Theta_{b,2}, & l=2 \end{cases}$$

где l принимает значение 1 или 2 для поверхностного и глубинного слоя почвы соответственно; F_1 – функция принимающие значение равно 0 если в точке расчета имеется снежный покров и 1 если отсутствует; F_2 – функция принимающая значение 0 если температура поверхностного слоя почвы ниже 275.15К и 1 если выше 275.15К.

3. Организация вычислений

Общая схема усвоения для задания начальных значений состоит из нескольких этапов. Задание начальных значений полей в свободной атмосфере проводится в соответствии с подходом описанном в . Затем проводился анализ приземной температуры, с использованием вариационного алгоритма усвоения и анализ относительной влажности. Анализ относительной влажности проводился с помощью оптимальной интерполяции и описан в работе . Далее проводилась коррекция почвенных переменных с использованием анализов температуры и относительной влажности на уровне 2 метра. Затем еще раз проводилась коррекция почвенных переменных с использованием усвоения спутниковых данных. С данного набора начальных полей стартовал 6-ти часовой прогноз по модели ПЛАВ. Этот прогноз использовался в качестве первого приближения для следующего цикла усвоения. Данный алгоритм усвоения схематично изображен на рисунке 1.

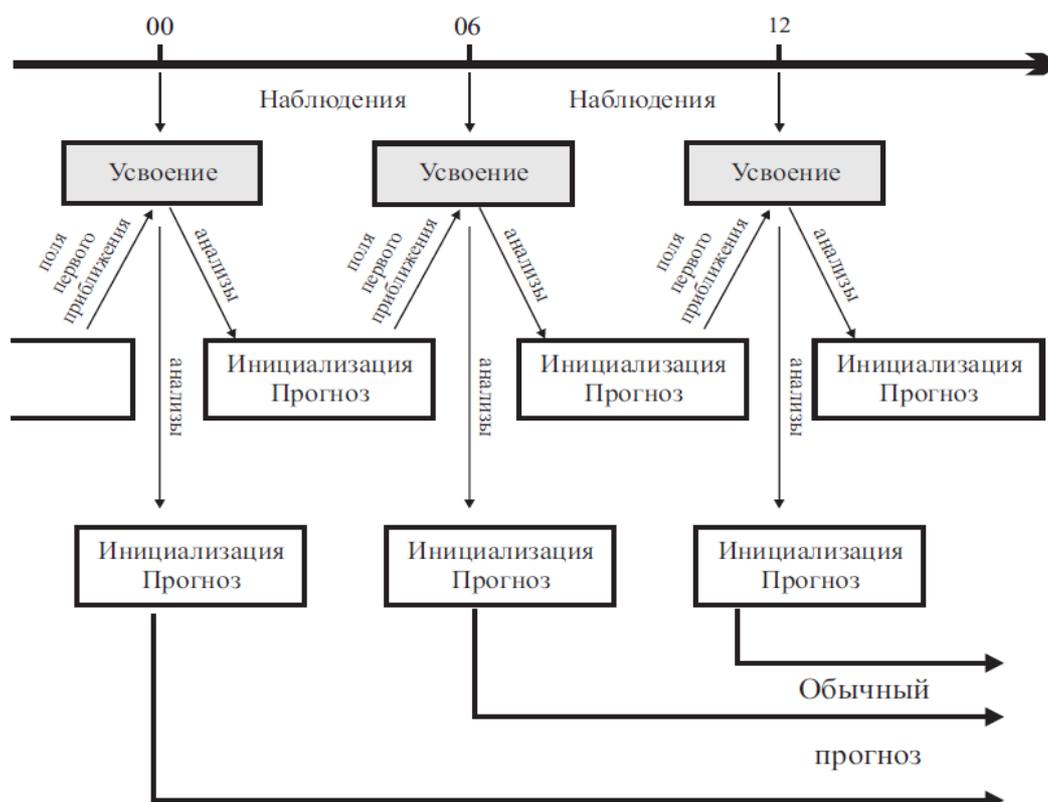


Рис. 1. Схема прогнозов и усвоения в полном цикле усвоения. По оси отложено время.

Одной из сложностей усвоения данных является вычислительная сторона алгоритма. Большая размерность задач не позволяет их решать на персональных компьютерах. Еще одно из ограничений, накладываемых в задаче усвоения данных наблюдений, это временное ограничение. Это связано с тем, что при применении усвоения данных наблюдений в задачах численного прогноза погоды в оперативном режиме, необходимо получить анализ в определенный временной интервал. Соответственно, эффективность реализации численного алгоритма является важной составляющей.

Алгоритм вариационного усвоения реализовывался для усвоения данных наблюдений приземной температуры на уровне 2-х метров, поэтому размерность задачи была значительно меньше, чем при полном 3-х мерном усвоении данных. Но даже в этом случае размерность вектора состояния, в который входит температура на уровне 2 метра, составляла 100 000 элементов, на сетке 0.9 градусов по долготе и 0.72 по широте. Вектор наблюдений имеет значительно меньшую размерность. Его размерность зависит от количества имеющихся наблюдений, средняя размерность составляет 8500 элементов.

При размерности вектора состояния 100 000 элементов ковариационная матрица ошибок поля первого приближения B имеет размерность 10^{10} . Для размещения данной матрицы в оперативной памяти компьютера потребовалось бы 80 Гбайт оперативной памяти. Матрица B содержит много нулевых элементов, к тому же, непосредственно в вычислениях применяется матрица L , такая что $B = L * L^T$. Матрица L является нижнетреугольной и так же имеет множество элементов равных 0. Применив специальные методы записи сильного разреженных матриц, можно уменьшить необходимое количество памяти для матрицы L . Для записи данной матрицы применялся метод SCR (sparse compressed row), модифицированный с учетом особенностей структуры матрицы L . Применение данного метода позволило снизить объем необходимой оперативной памяти в среднем до 2 Гб.

4. Параллельная реализация алгоритмов усвоения данных

Параллельная реализация необходима, в силу описанных выше причин. Объемы вычислений возрастают постоянно. Более того, использование программных комплексов в оперативном режиме накладывает на них временные ограничения, так как очевидно, что чем быстрее будет проведено усвоение данных наблюдений, тем быстрее может быть рассчитан прогноз.

Увеличение производительности современных вычислительных систем производится не только за счет увеличения числа процессоров, но так же и за счет увеличения количества ядер в каждом процессоре, поэтому необходимо проводить распараллеливание не просто с использованием какой-либо определенной параллельной технологии, но и с учетом архитектурных особенностей. В связи с этим распараллеливание необходимо проводить как с помощью OpenMP, так и с помощью MPI. В данной работе уделено внимание параллельной

реализации алгоритма вариационного усвоения, так как он по мнению автора представляет наибольший интерес.

Основные временные затраты в задаче вариационного усвоения данных наблюдений приходится на нахождение минимума стоимостного функционала. Поэтому наиболее пристальное внимание при распараллеливании уделялось именно данной задаче.

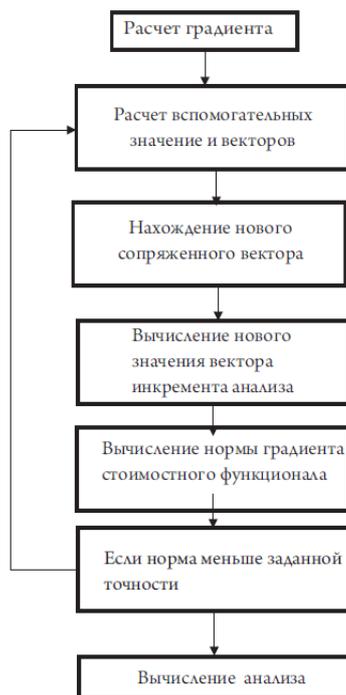


Рис. 2. Схема алгоритма минимизации стоимостного функционала

На рисунке 2 в виде схемы представлен алгоритм метода сопряженных векторов с ортогонализацией для нахождения минимума функционала. После профилирования временных затрат на каждый блок алгоритма, было установлено, что 90 % времени занимает вычисление градиента стоимостного функционала. Таким образом, основным участком программного алгоритма, распараллеливание которого необходимо производить, является расчет градиента.

Распараллелин был весь алгоритм, но далее будет описываться распараллеливание именно вычисления градиента. Для более наглядного представления расчетов в данном блоке, на рисунке схематично изображены математические действия, проводящиеся с матрицами и векторами.

$$\nabla_x J = \chi + L^T H^T R^{-1} (d - H L \chi)$$

Рис. 3. Вычисление градиента стоимостного функционала

Существуют специальные библиотеки (например, BLAS) для параллельного перемножения матриц и векторов, но использование стандартных библиотек, в данном случае, невозможно. Это связано с тем что, как уже отмечалось выше, для уменьшения объема памяти и возможности реализации алгоритма применялся специальный алгоритм упаковки сильно разреженной матрицы. И поэтому матрицы представляются в виде специфической структуры хранения данных.

Рассмотрим гибридное распараллеливание, когда распараллеливание проводится как с использованием технологии OpenMP, так и с использованием MPI. Опишем перемножение обычной матрицы на вектор. На начальном этапе все проводится, так же, как и в случае распараллеливания только с использованием MPI. Матрицы L и H разбиваются по строкам в соответствии с количеством MPI процессов. Вектора, участвующие в расчетах, распределяются полностью по всем MPI процессам. Таким образом, операция перемножения матрицы на вектор, сводится к перемножению прямоугольной матрицы на вектор в каждом MPI процесса. Соответственно, уже данное перемножение распараллеливается с помощью технологии OpenMP.

Распараллеливался только цикл по строкам матрицы. На рисунке 4 большими черными цифрами представлены номера MPI процессов. Пунктирной линией показывается распределение данных между ними. Более мелкими и серыми цифрами представлены номера OpenMP нитей, а точечными линиями представлено распределение данных между OpenMP нитями. Если пунктирной или точечной линии нет, значит, весь вектор находится в памяти процесса с соответствующим номером. После перемножения в каждом MPI процессе получается часть итогового вектора, поэтому после перемножения проводится операция сбора вектора.

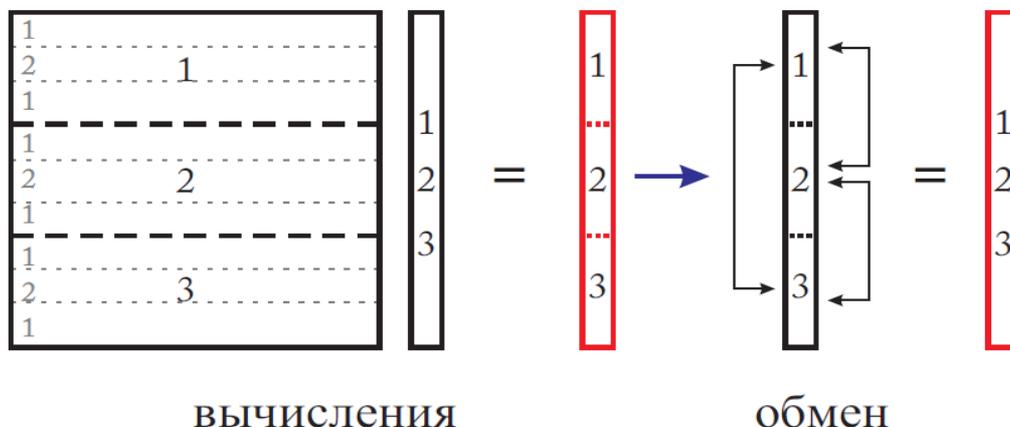


Рис. 4. Перемножение матрицы на вектор с использованием MPI и OpenMP.

Теперь рассмотрим перемножение транспонированной матрицы. Сначала рассмотрим распараллеливание с использованием MPI. В результате транспонирования матрицы получается, что разбиение матрицы осуществлено не по строкам, а по столбцам. Таким образом, перемножение проводится особым образом. Умножение части матрицы, имеющейся у каждого MPI процесса, проводится на часть вектора. Например, рассмотрим нулевой MPI процесс. Он обладает частью матрицы с 1 по 100 столбец. Соответственно, он проводит умножение этой части матрицы на элементы вектора с 1 по 100. В результате, получается что каждый MPI процесс в итоге получает вектор общей длины n (вектор, на который умножается, имеет размерность n), но является только результатом перемножения части матрицы на часть вектора. Поэтому, чтобы получить искомым вектор, применяется коллективная операция пересылки "все — всем" с операцией сложения. Т.е. все MPI процессы отсылают всем другим процессам свой вектор и получают от них вектор. Эти вектора складываются. В итоге получается искомым вектор, который располагается во всех MPI процессах.

Теперь рассмотрим распараллеливание с использованием OpenMP. Так как распараллеливание OpenMP проводится только внутри каждого MPI процесса, то фактически все сводится с распараллеливания перемножения прямоугольной матрицы на вектор, которые является частью основного вектора. Поэтому с помощью OpenMP проводится распараллеливания цикла по строкам. В результате проводится параллельное перемножение части матрицы на часть вектора. В итоге, так как результирующий вектор является общим для всех нитей OpenMP, мы получаем тот же результат, что и при отсутствии распараллеливания внутри MPI. На рисунке 5 приведена поясняющая схема. Предполагается что запущено 3 MPI процесса, и внутри каждого из них специализируется 3 OpenMP потока. Все обозначения аналогичны обозначениям на рисунке 3.

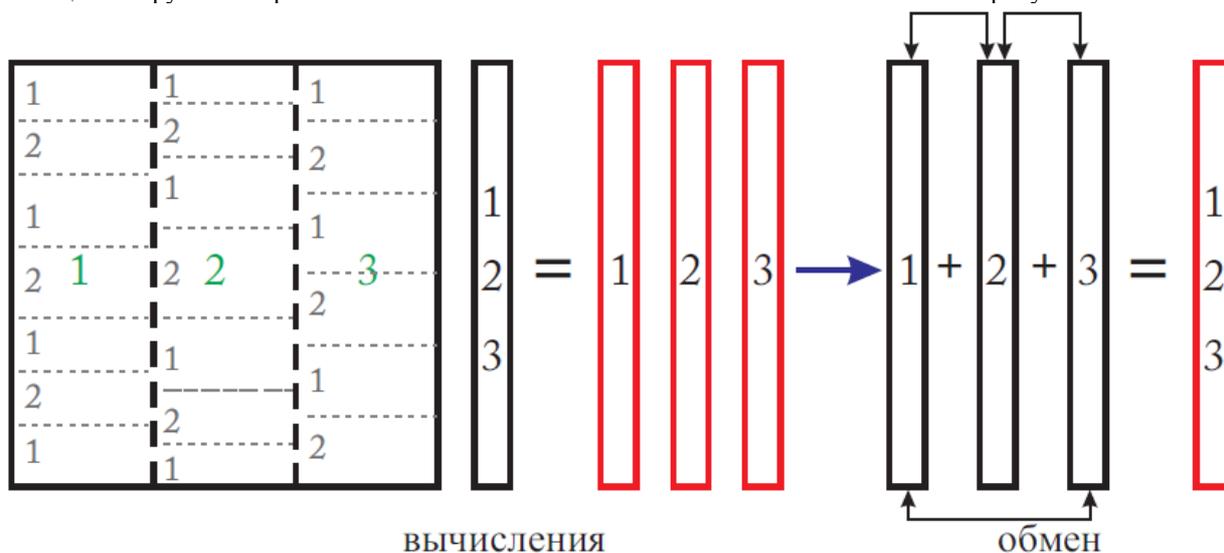


Рис. 5. Перемножение транспонированной матрицы на вектор с использованием MPI и OpenMP.

5. Результаты тестирования параллельного алгоритма

Тестирование разработанного и реализованного параллельного алгоритма проводилось на многопроцессорной вычислительной системе Института Вычислительной Математики Российской Академии Наук, далее кластер ИВМ РАН. Данный кластер состоит из головного узла и 16 вычислительных узлов. Каждый вычислительный узел состоит из двух 4-ядерных процессоров Intel Xeon X5355 2.66ГГц. Данные процессоры расположены на общей оперативной памяти объемом 8 Гб.

Сначала тестирование параллельного алгоритма проводилось при использовании только MPI. На рисунке 6 представлены график времени расчета (слева) и график ускорения (справа). Как видно из графика, максимальное ускорение удалось достичь при запуске 128 MPI процессов. Ускорение в данном случае составило 46.36. При большем числе процессов протестировать не позволяет кластер, но судя по поведению графика ускорения, ускорение находится близко к своему максимуму.

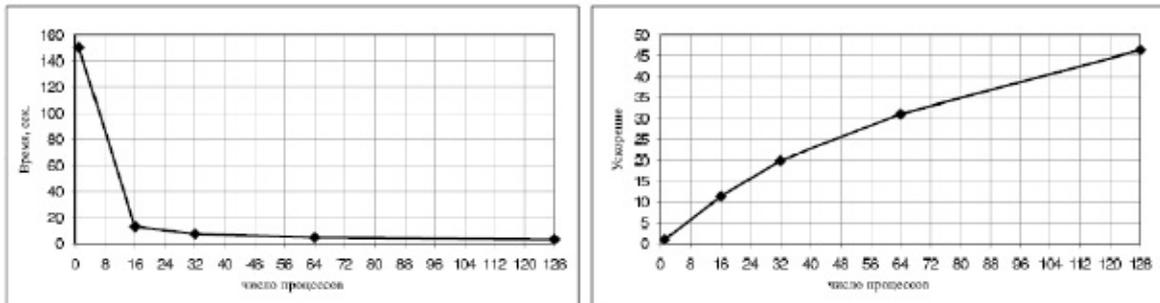


Рис. 6. Время и ускорение при использовании только технологии MPI

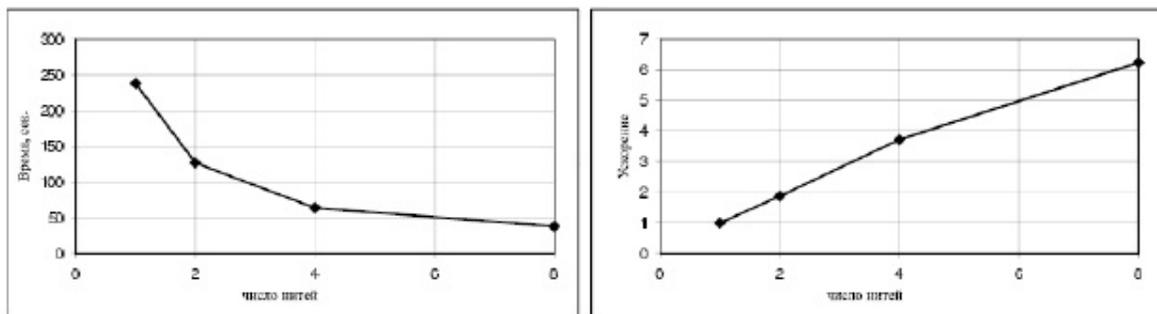


Рис. 7. Время и ускорение при использовании только технологии OpenMP

Результаты тестирования только с использованием OpenMP представлены на рисунке 7. Так как на общей памяти располагаются только два четырехядерных процессора, то максимальное число нитей OpenMP, на которых можно запустить задачу, составляет 8. В результате использования технологии OpenMP для распараллеливания, удалось достичь ускорения в 6.23 раза при использовании 8 OpenMP нитей. Ускорение же при использовании 8 MPI процессов равно 6.01. Таким образом, использование технологии OpenMP даст большее ускорение, при использовании двух четырехядерных процессоров, по сравнению с технологией MPI.

Теперь приведем результаты тестирования параллельного алгоритма в котором использовались как технологий MPI, так и OpenMP. При этом будем сравнивать с результатами ускорения при использовании только технологии MPI.

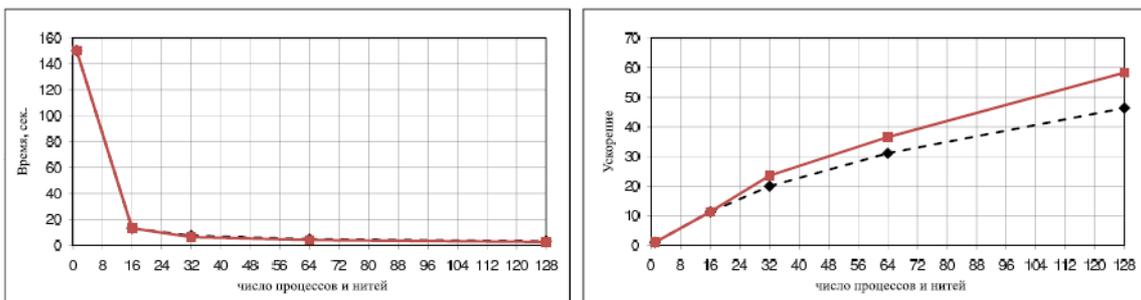


Рис. 8. Время и ускорение при использовании только технологии MPI (пунктирная линия) и гибридной технологии MPI - OpenMP (сплошная линия)

На рисунке 8 приведено ускорение в зависимости от числа используемых ядер. Сплошной красной кривой приведены результаты при использовании гибридной технологии при распараллеливании. Пунктирной черной линией, представлено ускорение при использовании только технологии MPI. Как видно из графиков, гибридное распараллеливание даст большее ускорение, при использовании того же самого количества ядер. При использовании всех доступных 128 ядер на кластере, ускорение при использовании гибридного распараллеливания составило 58,2, а при использовании только MPI, ускорение составило только 46,3.

Заключение.

В работе рассмотрены подходы к решению задачи усвоения данных наблюдений для численной модели прогноза ПЛАВ и параллельные методы реализации численных алгоритмов, которые позволяют применять их в оперативных расчетах. Реализация вариационного усвоения позволило существенно уменьшить ошибку прогнозирования приземной температуры. Усвоение спутниковых данных в настоящий момент в однократном усвоении позволило дополнительно уменьшить ошибки прогнозирования приземной температуры. Разработанный параллельный программный комплекс, позволяет проводить расчеты на многопроцессорных вычислительных системах с различной архитектурой. Как показали результаты, использование гибридной технологии при распараллеливании алгоритма позволило достичь большего ускорения по сравнению с другим алгоритмом, в котором использовалась только технология MPI. При расчетах на 128 ядрах кластера ИВМ РАН удалось ускорить расчеты в 58 раз.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-05-31240 мол_а.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 (соглашение № 14.В37.21.0667).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Толстых М. А. Полулагранжева модель атмосферы с высоким разрешением для численного прогноза погоды // *Метеорология и гидрология*. — 2001. — № 4. — С. 5-16.
2. Noilhan J., Mahfouf J.-F. The ISBA land surface parametrization scheme // *Global Planet Change*. 1996. Vol. 13 P. 145-149
3. Giard D., Bazile E. Assimilation of soil temperature and water content with ISBA in ARPEGe: some new developments and tests // *HIRLAM Newsl. Swedish Meteorological and Hydrological Institute*. 1996. №21. P. 10-12
4. Tarantola A. Inverse problem theory. Methods for data fitting and model parameter estimation. — Amsterdam: Elsevier, 1987. — 630 pp.
5. Богословский Н.Н., Шляева А.В., Толстых М.А. Усвоение почвенных и приземных переменных в глобальной полулагранжевой модели прогноза погоды // *Вычислительные технологии*. -2008.-Т. 13. Спец. выпуск. -С. 111-116.
6. Edouard B., Manevich A. An efficient conjugate directions method without linear searches // *Operations Research Proceedings 2004*. — Springer Berlin Heidelberg: 2004. — Pp. 327-334.
7. Bartalis, Z, W. Wagner, V. Naeimi, S. Hasenauer, K. Scipal, H. Bonekamp, J. Figa and C Anderson Initial soil moisture retrievals from the METOP-A Advanced Scatterometer (ASCAT) // *Geophysical Research Letters*. 2007. - №24 - L20,401
8. Mecklenburg S., Kerr Y., Gont J. and Hahne A. The soil moisture and ocean salinity (SMOS) mission - an overview // *Geophysical Research Abstracts*, 2008, Vol.10
9. Толстых М.А., Богословский Н.Н., Шляева А.В., Мизяк В.Г. Оперативная технология расчета глобальных прогнозов с помощью полулагранжевой модели атмосферы ПЛАВ // *Труды гидрометеорологического научно-исследовательского центра Российской Федерации*. — 2011. — № 346. — С. 145-154.
10. Shlyayeva A., Tolstykh M. New 2-meter relative humidity analysis for sl-av model // *Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modelling*, <http://collaboration.cmc.ec.gc.ca/science/wgnc>