

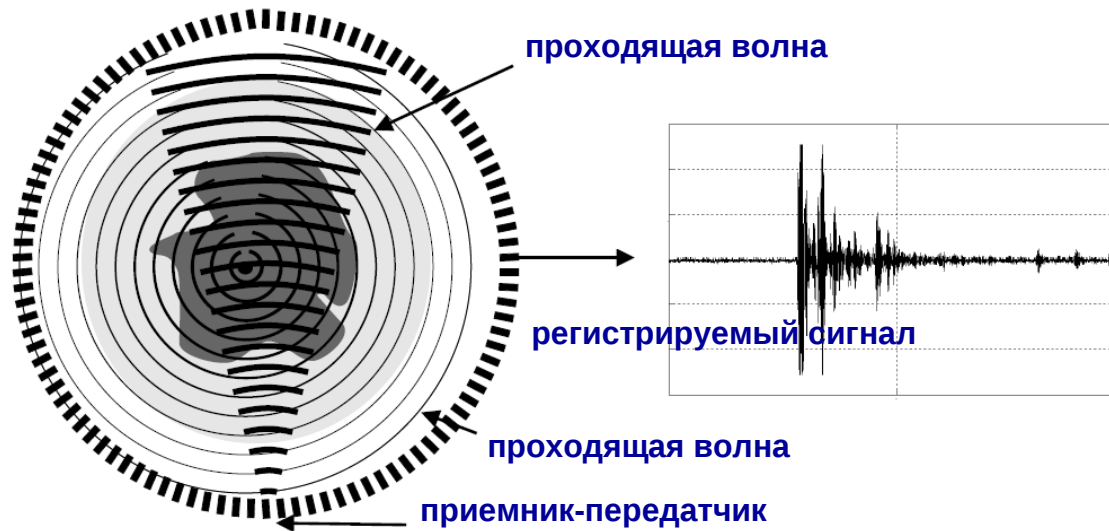
# Московский Государственный Университет



## **РЕШЕНИЕ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ ЗАДАЧ 3D НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОЙ ТОМОГРАФИИ СО СВЕРХВЫСОКИМ РАЗРЕШЕНИЕМ**

**С.Ю. Романов**

# Постановка задачи волновой томографии



## • **Постановка задачи во временной области**

### • **Волновое уравнение**

$$c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = \delta(r - q) \cdot f(t)$$

$$u(r, t = 0) = u_t(r, t = 0) = 0 \quad q \in X \text{ - положение источников}$$

$c(r) \equiv c_0 = const$ , при  $r \notin R$  - известна вне неоднородности

$u(r, t) = U(r, t)$ ,  $r \in Y$ ,  $t \geq 0$  - известна на приемниках

• **Требуется найти  $c(r)$  в  $R$ . Обратная задача нелинейная.**

• **Научно-исследовательский вычислительный центр**

# Постановка задачи волновой томографии. Градиентные методы решения

## •Прямая задача

$$c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = \delta(r - r_0) \cdot f(t)$$

$$u(r, t = 0) = u_t(r, t = 0) = 0$$

$$\partial_n u|_{ST} = p(r, t)$$

## •Сопряженная задача

$$c(r)w_{tt}(r,t) - \Delta w(r,t) = 0$$

$$w(r, t = T) = w_t(r, t = T) = 0$$

$$\partial_n w|_{ST} = u|_{ST} - U$$

## •Обратная задача - минимизация функционала невязки

$$\Phi(u(c), c) = \int_{ST} (u|_{ST} - U)^2$$

## •Градиент функционала имеет вид:

$$\Phi'_c(u(c), c) = \int_0^T w_t(r, t) u_t(r, t) dt$$

здесь  $u(r, t)$  и  $w(r, t)$  решения основной и сопряженной задач

•При проведении расчетов прямой задачи брали граничное условие неотражения на границе области расчетов  $c(r)\partial_n u|_{ST} = -\partial_t u|_{ST}$

• $T$  – выбирали достаточным для прохождения основных прямых и отраженных волн.

•Научно-исследовательский вычислительный центр

# Приложение к ультразвуковой томографии в медицине



- **Более 40 тысяч женщин** ежегодно заболевают раком молочной железы. Доля лиц с поздними стадиями заболевания среди первичных больных превышает 40%.
- Ультразвуковые томографы высокого разрешения позволят осуществлять **раннюю диагностику рака**.
- **Каждое 4-е** онкологическое заболевание – рак груди.

## • Почему не X-Ray томография?

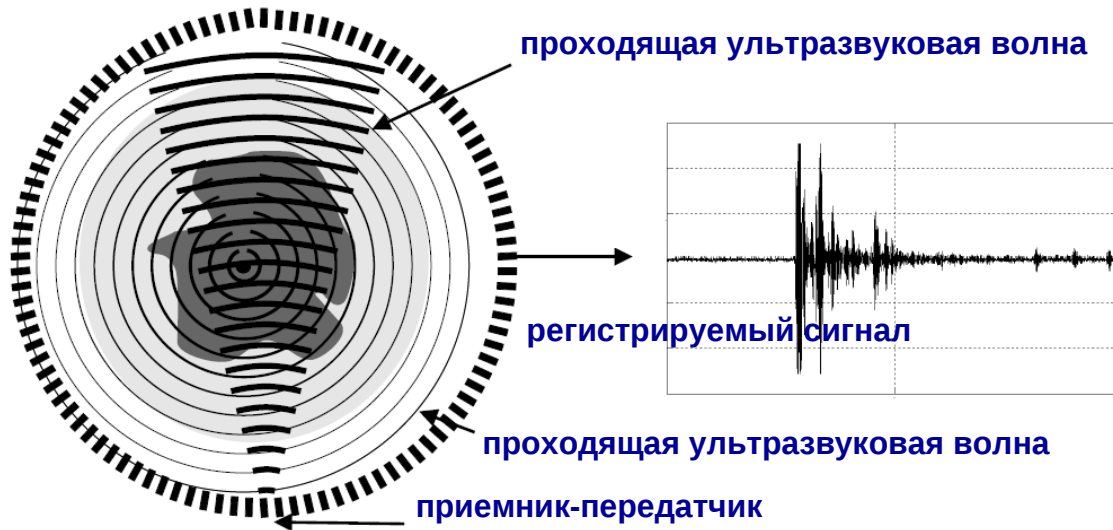
Невозможность проведения безопасных регулярных рентгеновских обследований из-за дозы получаемого излучения.

• В настоящее время не существует серийно выпускаемых ультразвуковых томографов.

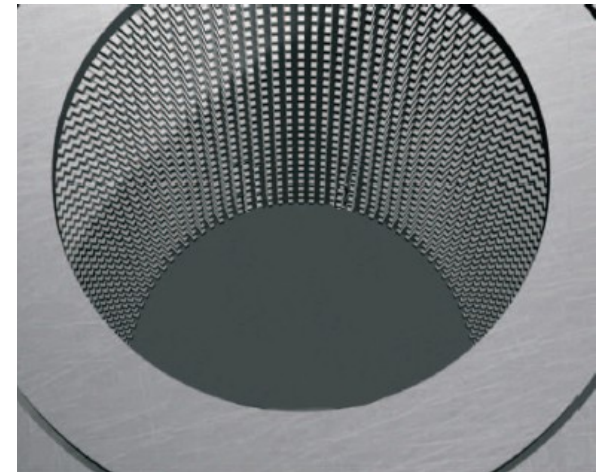
• В США и Европе ведутся интенсивные работы по разработке программного обеспечения и макетов установок.

# Томографические схемы

## Послойная томография



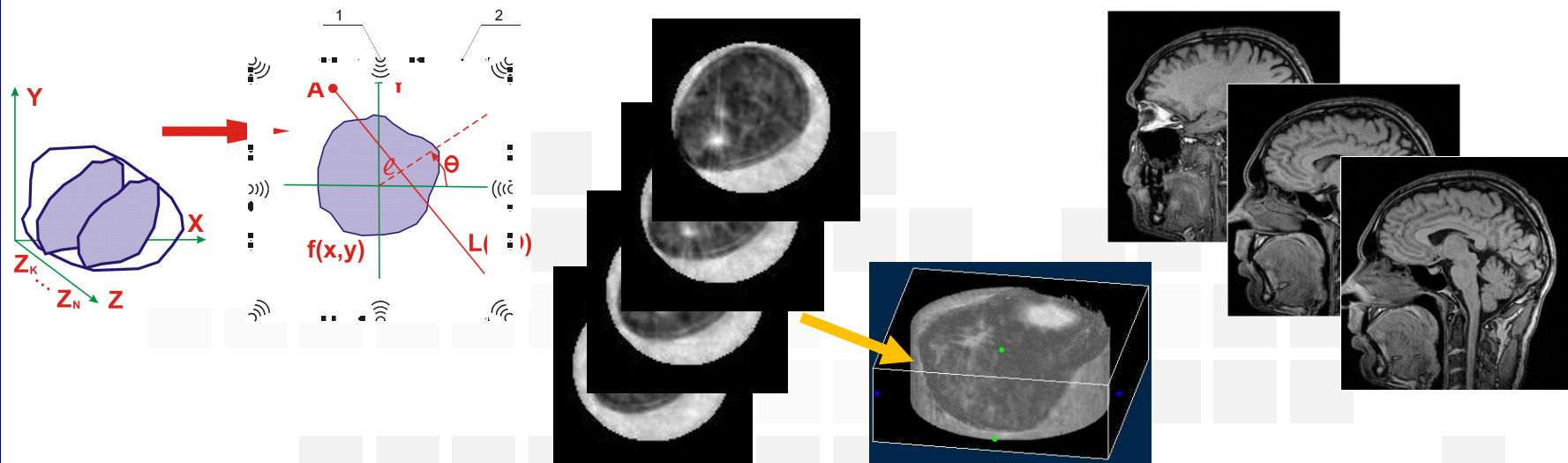
## 3D томография



### • Почему не использовать стандартные ультразвуковые сканеры?

Все УЗИ не являются томографическими. В обычных УЗИ, информация получается с одного или нескольких ракурсов. В томографах используется обзор с 360 градусов. За счет этого - высокая разрешающая способность.

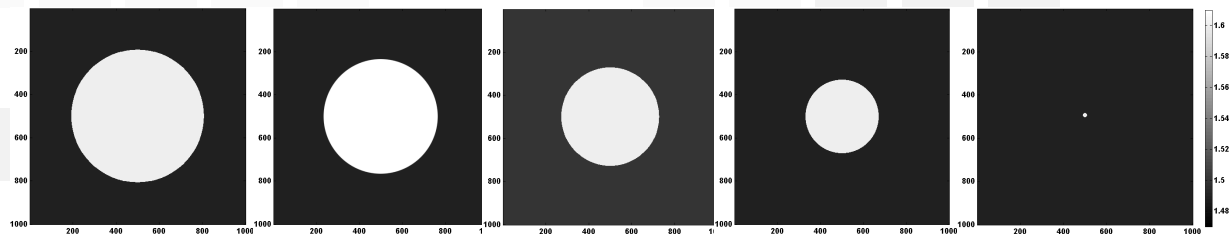
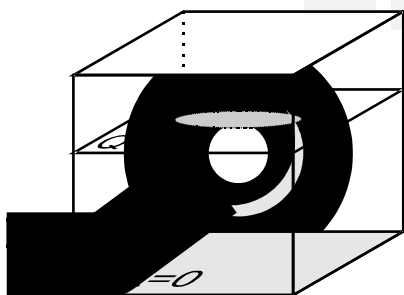
# Послойная реконструкция vs. непосредственно 3D реконструкция



- **Послойная реконструкция:** исходная трехмерная задача разбивается на  $N$  ( $N$  – число слоев) независимых двумерных обратных задач.
- **3D реконструкция:** решается трехмерное уравнение.
- Решать двумерные задачи проще.
- Послойная реконструкция хорошо подходит для X-ray, т.к. коэффициент рефракции  $\sim 1$ .
- Для ультразвука существенны эффекты дифракции, рефракции, переотражения, излучение не сохраняется в слое.
- Большой объем данных: 17 источников, приемники с шагом полдлины волны, оцифровка по времени 20 отсчетов на длину волны,  $400 \times 400 \times 400$  точек сетки в области расчетов, число неизвестных порядка ста миллиардов.

# Послойная реконструкция vs. непосредственно 3D реконструкция

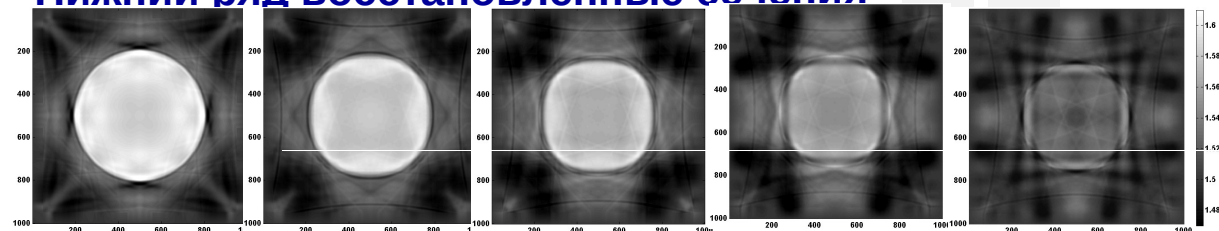
- **Проблема:** Возможна ли послойная реконструкция 3D объекта в УЗ томографии?
- **Модельный эксперимент для сферы.**
- Экспериментальные данные получены из точных аналитических формул в 3D.
- В случае  $< 0.5R$ : качество реконструкции хорошее.
- В случае  $> 0.5R$ : искажение геометрической формы, появление артефактов, размывание вдоль оси z.
- Для получения высокого разрешения необходимо решать 3D.



Верхний ряд модельные сечения 3D шара радиуса 6см.

Z = 0 см    Z = 3 см    Z = 4 см    Z = 5 см    Z = 6 см

Нижний ряд восстановленные сечения



# Численный алгоритм

- Аппроксимации частных производных 2-го порядка точности
- Явная разностная схема для расчета по временным слоям распространения звуковой волны (расчет «в прямом и обратном времени»)

$$u_{ijklk+1} = u_{ijkl} \left( 2 - \frac{8\tau^2}{c_{ijl} h^2} \right) + \frac{(u_{i+1,ilk} + u_{i-1,ilk})\tau^2}{c_{ijl} h^2} + \frac{(u_{ij+1lk} + u_{ij-1lk})\tau^2}{c_{ijl} h^2} + \frac{(u_{ijl+1k} + u_{ijl-1k})\tau^2}{c_{ijl} h^2} - u_{ijkl-1}$$

Условие неотражения на границе

Условие устойчивости Куранта

$$\partial_n u|_{ST} = -c^{0.5} \partial_t u|_{ST}$$

$$c^{-0.5} \tau < h$$

Градиент функционала невязки вычисляется по формуле

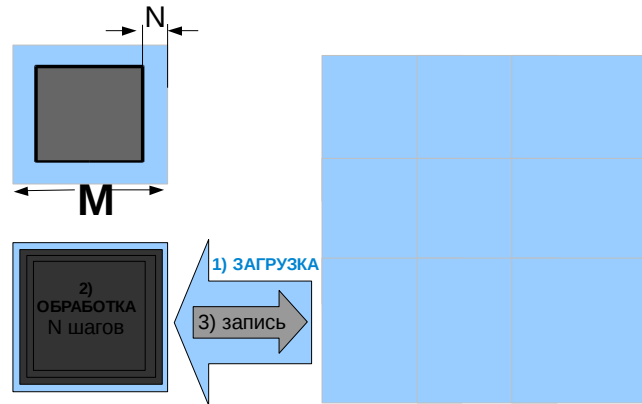
$$\text{grad}_{ijl} = \sum_{k=0}^m \frac{u_{iilk+1} - u_{iilk}}{\tau} \frac{w_{iilk+1} - w_{iilk}}{\tau} \tau$$

Итерационная последовательность:

1. В качестве начального приближения используется  $C^0 = \text{const}$ .
2. Для  $C^0$  с помощью явной разностной схемы решается прямая задача, находим волну  $u(r, t)$  на каждом из детекторов.
3. Для функции  $u(r, t)$ , решается сопряженная задача по явной схеме, получаем  $w(r, t)$ .
4. Используя полученные значения  $u(r, t)$  и  $w(r, t)$ , вычисляется градиент.
5. Зная градиент в точке  $C^0$ , находится минимум функционала  $\Phi(C^{(0)} - k\Phi'_C(C^{(0)}))$  по параметру  $k$  в области  $k > 0$ .
6. Точка минимума функционала принимается за  $C^1$ . Процесс возвращается к пункту 1.



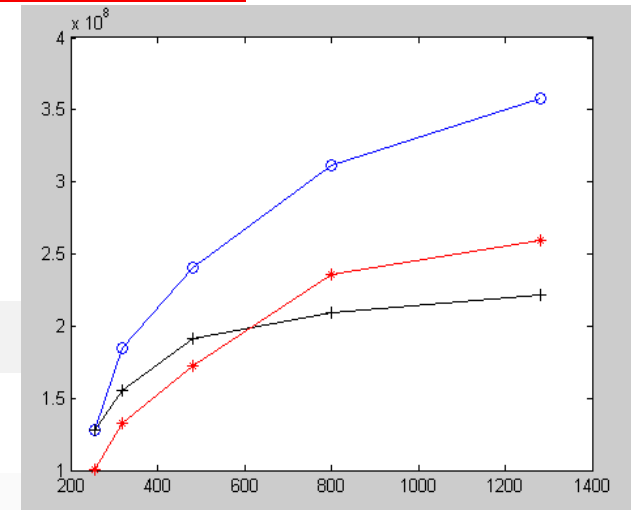
# Структура распараллеливания в 2D



- Суммарное время обращений в графическую память больше, чем вычислений -> задача получить арифметически-интенсивные вычисления.
- $M$  выбирается исходя из объема кэш-памяти ядра ~  $50 \times 50$  точек
- организация вычислений на GPU:
  - загрузка данных  $M \times M$  для моментов времени  $T-1$  и  $T$  из памяти
  - выполнение  $N$  шагов разностной схемы по времени
  - запись результатов  $M-N \times M-N$  для моментов времени  $T+N-1$  и  $T+N$  в память.В силу структуры разностной схемы получаем только  $M-N \times M-N$ .

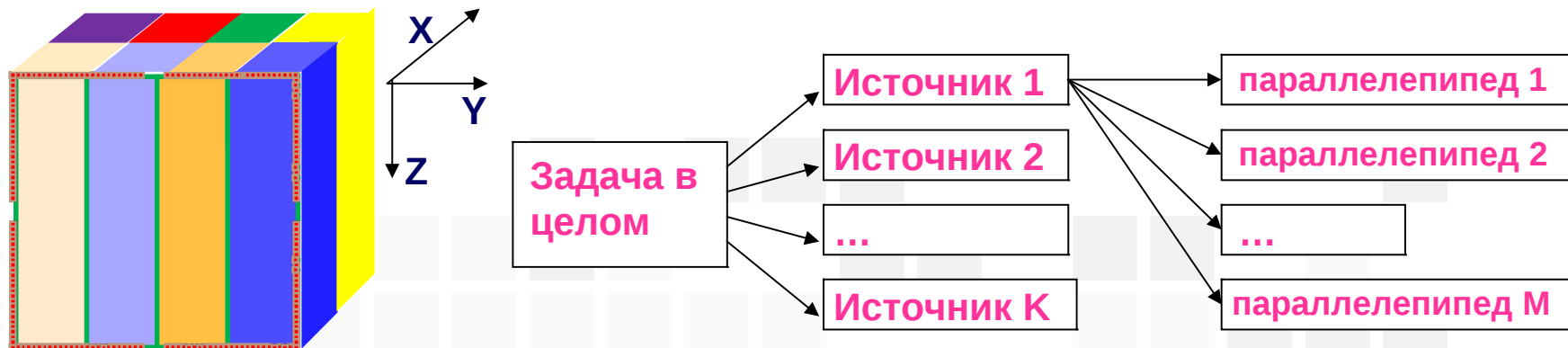
• Производительность 1 карта NVIDIA Tesla X2070 ~ 30-40 ядер процессора Intel Xeon X5570 суперкомпьютер «Ломоносов».

• Научно-исследовательский вычислительный центр



Производительность GPU (кол-во рассчитанных точек в сек) в зависимости от размерности задачи, с перекрытием  $N=5$  точек (o),  $N=10$  (+),  $N=1$  (\*).

# Структура распараллеливания в 3D

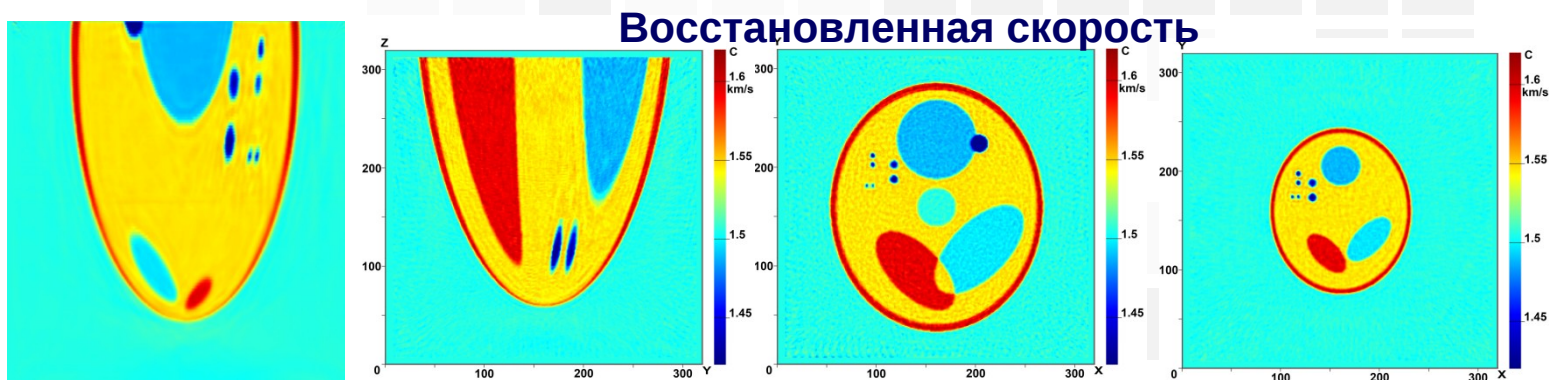
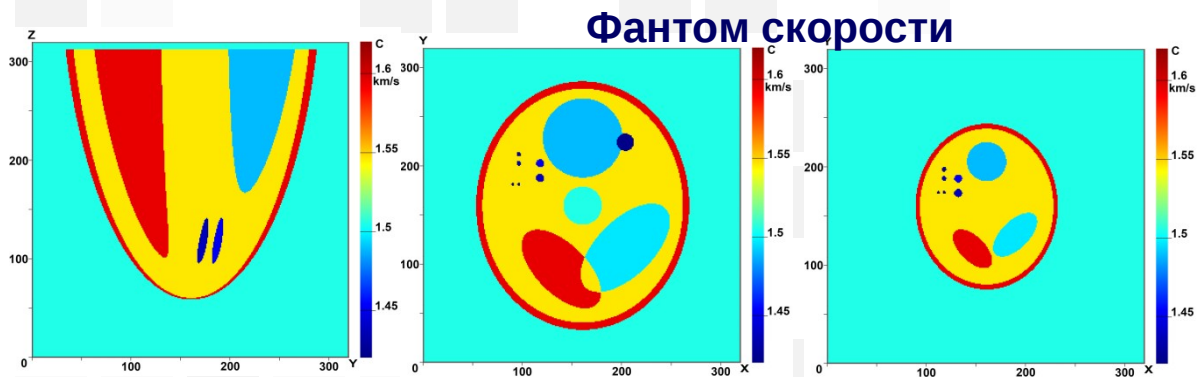
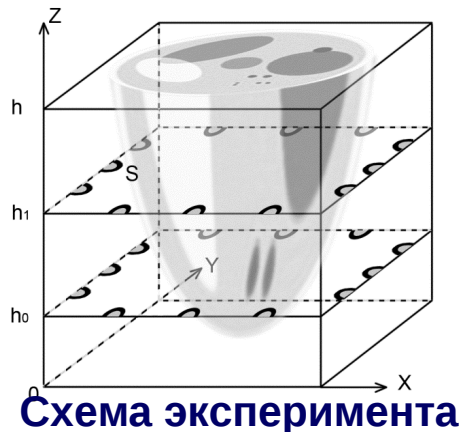


- Структура распараллеливания используемая в 2D не годится, т.к. в кэш помещается только 13x13x13 точек.
- Число источников = числу карт GPU.
- 1 ядро – расчет в параллелепипеде 32x16x 400 точек сетки. 32x16=512 потоков, расчет вниз по Z.
- Графические карты NVIDIA Tesla X2070 суперкомпьютер «Ломоносов», C/C++/OpenCL.

# Полный диапазон данных в 3D

- Впервые разработаны алгоритмы и создан комплекс масштабируемых программ для суперкомпьютеров на GPU в 3D задачах УЗ томографии в медицине.
- Проведены модельные расчеты на сетках до 500x500x500 для прямой и обратной задачи с полным и неполным диапазоном углов данных, разрешение порядка 2-3

ММ.



# Неполный диапазон данных в 3D

Решение задачи на суперкомпьютере «Ломоносов»  
17 графических карт NVIDIA Tesla X2070.

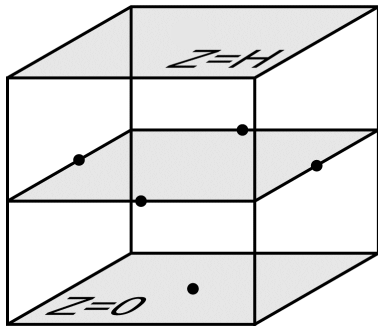
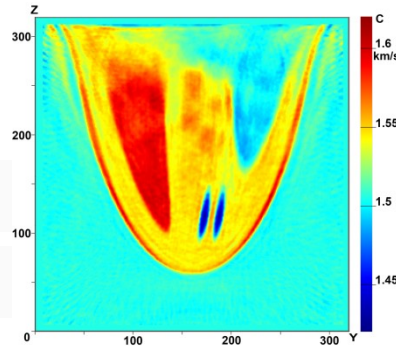
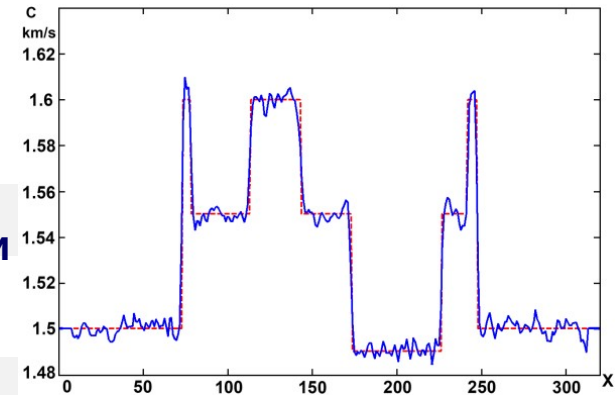


Схема эксперимента 1



Сечение скорости

- Источников -17
- Время ~ 2 часов
- Длина импульса - 5 мм.
- Сетка 420x420x420.
- Область 10x10x10 см



Восстановленная скорость

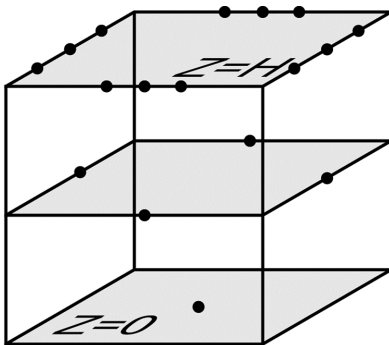
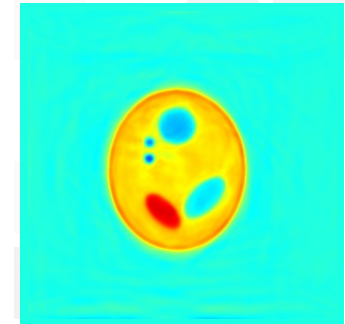
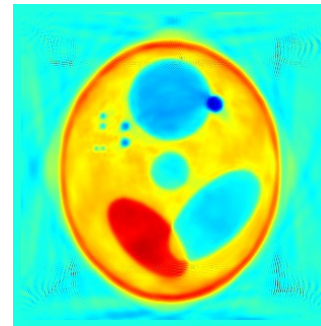
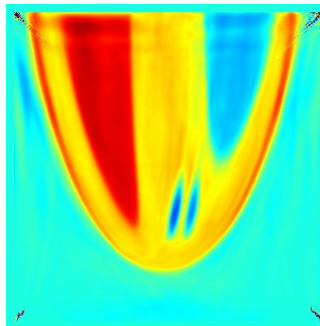
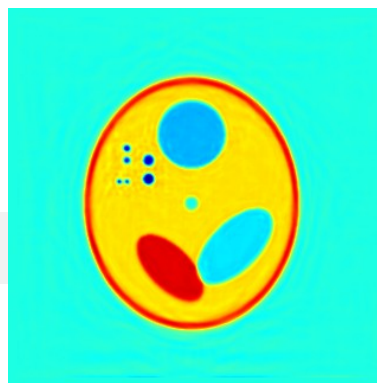
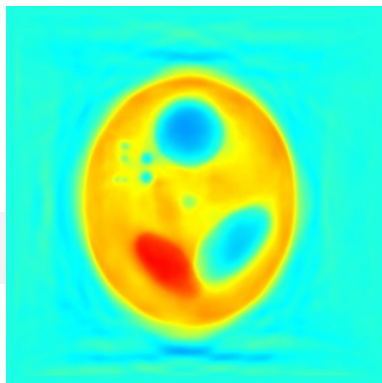
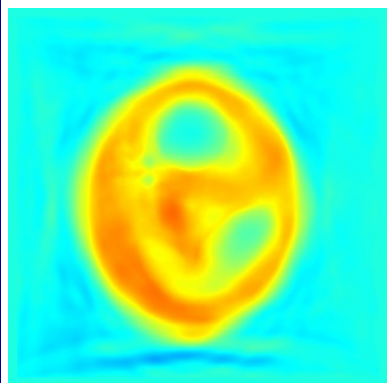


Схема эксперимента 2



# Модельные расчеты на GPU



5 итераций;

15 итераций;

120 итераций

Результаты модельных расчетов

- Невязка за 120 итераций уменьшилась в 30 раз.
- Невязки  $2.3 \cdot 10^{-4}$  соответствует уровню ошибки  $\sim 0.23\%$ .
- Метод наискорейшего спуска обеспечивает монотонное убывание невязки. Вначале убывает быстро, затем скорость заметно уменьшается.



Число итераций	5	15	120
Функционал невязки 6 источников	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$
Время расчета (мин)	5	15	120

# Основные результаты и выводы

- Предложены эффективные методы и алгоритмы решения 3D задач волновой томографии как коэффициентных обратных задач через прямое вычисление градиента функционала невязки. Методы предполагают не послойное (двумерное) восстановление 3D объекта, а решение непосредственно трехмерного уравнения.
  - Решение непосредственно 3D уравнения позволяет повысить качество реконструкции и разрешение. Удастся восстанавливать не только форму неоднородности, но и абсолютные значения скоростей.
  - 3D задача приводит к сверхбольшому объему данных в нелинейной обратной задаче с числом неизвестных порядка ста миллиардов.
  - Разработанные алгоритмы хорошо масштабируются на GPU. Предложена структура программы, позволяющая выделить большое количество независимых параллельных процессов в общем потоке задачи.
1. Специальный выбор положения источников позволяет получить изображения высокого качества даже при неполных данных (со стороны грудной клетки).
  2. Работа выполнена при поддержке РФФИ проект № 12-07-00304-А
  3. Работа опубликована в высокорейтинговом журнале *Inverse Problems*.