

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ В ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ ТОМОГРАФИИ С УЧЕТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ

С.Ю. Романов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

1. Введение. Различные физические задачи описываются скалярными волновыми уравнениями гиперболического типа. К таким задачам относятся обратные задачи ультразвуковой (УЗ) томографии в медицине, электромагнитного зондирования, томографии неоднородностей морского дна [1], акустической диагностики железнодорожных насыпей [2], инженерной сейсмологии [3], неразрушающего контроля ультразвуком сварных швов [4] и т.п.

Во всех перечисленных выше задачах всегда присутствует поглощение как неотъемлемый физический процесс распространения волн в средах. Настоящая работа посвящена решению обратных задач диагностики объектов с помощью волнового зондирования. Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача для уравнения гиперболического типа с учетом эффектов поглощения.

В настоящее время в медицине для регулярных обследований используется ультразвуковая диагностика, которая не может обладать высоким разрешением из-за ограниченного диапазона углов наблюдения. В отличие от рентгеновских томографов математические модели УЗ томографии должны учитывать явления дифракции, рефракции, переотражения волн и т.д. Поглощение УЗ волн в диагностируемом объекте является одним из основных физических процессов. В задачах акустического зондирования поглощение, как правило, возрастает с увеличением частоты. УЗ импульсы большой частоты более 20 МГц используются исключительно для диагностики подкожных слоев, поскольку полностью поглощаются на глубине порядка нескольких миллиметров. На частоте порядка от 0.3 до 1.5 МГц ослабление сигнала от источника в мягких тканях человека может достигать нескольких раз при размере диагностируемого объекта 10-15 см [5]. Именно этот диапазон от 0.3-1.5 МГц используется при проектировании УЗ томографов.

Задачей УЗ томографии является поиск неоднородностей в диагностируемой области. В идеале можно пытаться искать как неоднородности по скорости распространения УЗ волны, так и неоднородности по поглощению. Одной из целей статьи является оценка возможности одновременного определения скоростного разреза и неоднородностей по поглощению из решения обратной задачи для волнового уравнения с поглощением.

Попытки решения обратных задач в моделях с поглощением лишь единичны. Связано это с тем, что разработка методов решения коэффициентных обратных задач, когда неизвестными являются как функции характеризующие скорость, так и функции характеризующие поглощение является очень сложной задачей, в том числе в вычислительном плане. Полное решение ее без различного рода упрощений возможно только на суперкомпьютерах. В работах [6, 7] предложены методы решения обратных задач УЗ томографии в приближенной параболической модели для волнового уравнения, которая достаточно хорошо работает при небольших углах дифракции и рефракции. В рамках параболической модели можно использовать только томографическую схему на прохождение, что приводит к необходимости решать поэтапно две разные задачи на отражение и на прохождение. В работах [8, 9] рассматривается обратная задача для уравнения Гельмгольца. Сделана попытка восстановления функции описывающей поглощение в рамках упрощенной модели. Восстановление скоростного разреза осуществляется в томографической схеме на прохождение [10]. В работе [11] рассмотрена постановка обратной задачи с учетом поглощения независимого от частоты. На теоретическом уровне описан «propagation-backpropagation» метод решения для этой постановки, выписано выражение для градиента функционала невязки. В другой постановке выражение для градиента функционала невязки для волнового уравнения с учетом поглощения независимого от частота получено в работе [12]. Часть работ посвящена исследованию алгоритмов решения трёхмерных [13-16]. Среди последних публикаций в области ультразвуковой томографии отметим статью [17], в которой исследуется возможность получения как скоростного разреза, так и распределения плотности по массе в исследуемом объеме.

В настоящей работе рассмотрена модель, имеющая квадратичную зависимость поглощения от частоты зондирующих импульсов. Неизвестными являются не только функция, характеризующая скоростной разрез, но и поглощение в диагностируемой области. Зондирование осуществляется короткими импульсами. В рамках стандартной томографической постановки для разных положений источников собирается зарегистрированный сигнал как функции от времени с большого количества приемников. Используя представление для градиента функционала невязки как по функции скорости, так и по функции поглощения, разработаны численные методы и проведены расчеты модельных задач на суперкомпьютере «Ломоносов» на процессорах общего назначения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект №. 13-07-00824-а.

2. Постановка и методы решения обратной задачи. Рассмотрим волновую модель, в которой поглощение квадратично зависит от частоты. Будем рассматривать так называемое стоковское поглощение в вязких средах [18]. Задачу будем описывать уравнениями (1-2).

$$c(r)u_{tt}(r,t) + a(r)(\Delta u)_t - \Delta u(r,t) = \delta(r-q) \cdot f(t), \quad (1)$$

$$u(r,t=0) = u_t(r,t=0) = 0, \quad \partial_n u|_{ST} = p(r,t). \quad (2)$$

Здесь $u(r,t)$ акустическое поле в области $\Omega \subset R^N$, $N = 2, 3$, ограниченной поверхностью S , точечный источник располагается в точке q , $\partial_n u|_{ST}$ - производная вдоль нормали к поверхности S в области $S \times (0, T)$, $p(r,t)$ - некоторая известная функция. Предполагается, что вне области неоднородности скорость $c^{-0.5}(r) = v(r) \equiv v_0 = const$, где v_0 - известна, а в окрестности ограничивающей поверхности S $a(r)|_S = 0$.

В случае исследования объекта помещенного в воду можно считать выполненным условие $a(r) \equiv 0$ около границы, поскольку поглощение ультразвука в воде гораздо меньше, чем в тканях. Решение задачи (1-2) заключается в расчете волнового поля в области Ω , если в качестве источника излучения используется точечный источник. Условия (2) представляют собой граничные и начальные условия. Функция $p(r,t)$ может быть получена из решения внешней задачи в однородной среде для области $R^N \setminus \Omega$ по экспериментальным данным на границе. Однако в настоящей работе использовались приближенные условия неотражения на границе описанные ниже.

Обратная задача состоит в нахождении функций $c(r)$ и $a(r)$, описывающих неоднородность, по экспериментальным данным измерения волны $U(s,t)$ на границе S области за время $(0, T)$ при различных положениях r_0 источника.

Введем функционал невязки

$$\Phi(u(c)) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_S (u(s,t) - U(s,t))^2 ds dt. \quad (3)$$

Здесь $U(s,t)$ - экспериментальные данные на границе S области за время $(0, T)$. Поставим обратную задачу как задачу минимизации квадратичного функционала (3). Для минимизации функционала будем использовать градиентные итерационные методы. Выделяя линейные части по вариации dc и da , для градиента функционала $\Phi(u(\xi))$ имеем [19]

$$\Phi'_c(u(c)) = \int_0^T w_t(r,t) u_t(r,t) dt, \quad \Phi'_a(u(a)) = \int_0^T w_t(r,t) \Delta u(r,t) dt \quad (4)$$

Здесь $u(r,t)$ - есть решение основной задачи (1-2), а $w(r,t)$ - есть решение «сопряженной» задачи при заданных $c(r)$ и $a(r)$. Таким образом, для вычисления градиента функционала необходимо решить основную и «сопряженную» задачи.

3. Численные алгоритмы решения обратной задачи в среде с поглощением. Для решения обратной задачи будем использовать метод конечных разностей. На области изменения аргументов введем равномерную дискретную сетку

$v_{ijk} = \{(x_i, y_j, t_k) : x_i = ih, 0 \leq i < n; y_j = jh, 0 \leq j < n; t_k = k\tau, 0 \leq k < m\}$, где h - шаг сетки по горизонтальным координатам, τ - шаг сетки по времени. Параметры h и τ связаны условием устойчивости Куранта $c^{-0.5}\tau < h/\sqrt{2}$. Параметры n, m задают количество точек сетки по горизонтальным координатам и времени.

Мы использовали четырехслойную по времени схему, которая обеспечила получение устойчивого решения волнового уравнения с поглощением (1). Для слагаемого $a(r)(\Delta u)_t$ предложена следующая схема

$$\frac{a_{ij}}{\tau h^2} \left[\left(u_{i+1j}^k - u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1} + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k - u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1} + u_{ij-1}^k \right) - \left(u_{i+1j}^{k-1} - u_{ij}^k - u_{ij}^{k-2} + u_{i-1j}^{k-1} + u_{ij+1}^{k-1} - u_{ij}^k - u_{ij}^{k-2} + u_{ij-1}^{k-1} \right) \right].$$

Выделяя член u_{ij}^{k+1} , получаем явную разностную схему по временным слоям для расчета распространения звуковой волны (расчет «в прямом времени») для уравнения (1)

$$u_{ij}^{k+1} = \left(\frac{c_{ij}}{\tau^2} - \frac{2a_{ij}}{\tau h^2} \right)^{-1} \left[\frac{c_{ij}}{\tau^2} (2u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1}) - \frac{a_{ij}}{\tau h^2} \{ (u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^{k-1} + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k) \right. \\ \left. - (u_{i+1j}^{k-1} - 2u_{ij}^k - 2u_{ij}^{k-2} + u_{i-1j}^{k-1} + u_{ij+1}^{k-1} + u_{ij-1}^{k-1}) \right] + \frac{1}{h^2} (u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k - 4u_{ij}^k). \quad (5)$$

Начальные условия задаются в виде $u_{ij}^0 = u_{ij}^1 = 0$. В качестве граничных условий для модельных расчетов в настоящей статье выбиралось условие неотражения на границе, которое в разностной аппроксимации имеет вид

$$\frac{(u_{i+1j}^k - u_{i-1j}^k)}{2h} = \pm \frac{(u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1})}{c_{ij}^{0.5} 2\tau} \text{ для } i = 1 \text{ или } n - 2.$$

Аналогично по индексу j для $j = 1$ или $n - 2$.

Для аппроксимации слагаемого $\Delta\{a(r)w_t(r,t)\}$ в сопряженной задаче предложена следующая схема

$$\frac{1}{\tau h^2} [a_{i+1j} (w_{i+1j}^{k+1} - w_{i+1j}^k) - a_{ij} \{ (w_{ij}^{k+2} + w_{ij}^k) - (w_{ij}^{k-1} + w_{ij}^{k+1}) \}] + a_{i-1j} (w_{i-1j}^{k+1} - w_{i-1j}^k) \\ + a_{ij+1} (w_{ij+1}^{k+1} - w_{ij+1}^k) - a_{ij} \{ (w_{ij}^{k+2} + w_{ij}^k) - (w_{ij}^{k-1} + w_{ij}^{k+1}) \}] + a_{ij-1} (w_{ij-1}^{k+1} - w_{ij-1}^k).$$

Разностная схема для волны $w(r,t)$ в сопряженной задаче выписывается в следующей явной форме по временным слоям в обратном времени

$$w_{ij}^{k-1} = \left(\frac{c_{ij}}{\tau^2} - \frac{2a_{ij}}{\tau h^2} \right)^{-1} \left[\frac{c_{ij}}{\tau^2} (2w_{ij}^k - w_{ij}^{k+1}) + \frac{1}{\tau h^2} [a_{i+1j} (w_{i+1j}^{k+1} - w_{i+1j}^k) + a_{i-1j} (w_{i-1j}^{k+1} - w_{i-1j}^k) \right. \\ \left. + a_{ij+1} (w_{ij+1}^{k+1} - w_{ij+1}^k) - 2a_{ij} (w_{ij}^{k+2} + w_{ij}^k - w_{ij}^{k+1}) + a_{ij-1} (w_{ij-1}^{k+1} - w_{ij-1}^k) \right] \\ + \frac{1}{h^2} (w_{i+1j}^k + w_{i-1j}^k + w_{ij+1}^k + w_{ij-1}^k - 4w_{ij}^k).$$

Градиент (4) функционала невязки вычислялся по разностной формуле

$$\text{grad}C_{ij} = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^k}{\tau} \tau, \\ \text{grad}A_{ij} = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k - 4u_{ij}^k}{h^2} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k-1}}{\tau} \tau, \quad (6)$$

где $\text{grad}C_{ij}$ градиент в точке (x_i, y_j) по c , а $\text{grad}A_{ij}$ - градиент в точке (x_i, y_j) по a . Невязка вычисляется по формуле

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \sum_{(i,j) \in S} (u_{ij}^k - U_{ij}^k)^2 h \tau. \quad (7)$$

Здесь S - граница, U_{ij}^k - значения $U(r,t)$ в точке (x_i, y_j) на границе S в момент времени t_k .

Для проведения модельных расчетов был использован следующий итерационный процесс.

В качестве начального приближения выбирается значение $c^{(0)} = c_0 = \text{const}$, соответствующее скорости звука в чистой воде 1.5 км/с и

$$a^{(0)} = \begin{cases} a_0 = \text{const}, & \text{для } (i, j) \in G \\ 0, & \text{для } (i, j) \notin G \end{cases},$$

где a_0 - некоторое среднее значение поглощения в области G , граница области G - известна.

На каждой итерации (p) выполняются следующие действия:

1. Расчет начального импульса источника.
2. Решение прямой задачи (1-2) для текущего итерационного приближения $(c^{(p)}, a^{(p)})$. Расчет распространения ультразвуковой волны $u^{(p)}(r, t)$ выполняется по формуле (5). Вычисляются значения $u(r, t)$ на каждом из детекторов.
3. Вычисление невязки $F^{(p)} = F(u^{(p)}(r, t))$ по формуле (7).
4. Решение сопряженной задачи для $w^{(p)}(r, t)$.
5. Вычисление градиента ($\text{grad}C^{(p)}, \text{grad}A^{(p)}$) по формуле (6) для всех источников.

6. Коррекция текущего приближения $c^{(p+1)} = c^{(p)} + \gamma^{(p)} \text{grad}C^{(p)}$, $a^{(p+1)} = a^{(p)} + \gamma^{(p)} \text{grad}A^{(p)}$. Процесс возвращается к пункту 2.

Итерационный процесс останавливается либо, если невязка становится меньше заданной величины, которая соответствует известной априори погрешности входных данных, либо, при достижении заданного минимального значения скорости убывания невязки.

Начальный шаг метода градиентного спуска $\gamma^{(0)}$ выбирается из априорных соображений. Для более точного определения шага для наискорейшего спуска потребовалось бы выполнять дополнительные итерации, что увеличило бы время расчётов в 2 и более раз. Если невязка $F^{(p)}$ на следующей итерации оказывается больше $F^{(p-1)}$, шаг $\gamma^{(p)}$ уменьшается в 1.5 раза.

После каждой итерации полагали $a^{(p)} = 0$, для $(i, j) \notin G$, что соответствует априорной информации о том, что поглощение вне области G отсутствует.

4. Модельные расчеты на суперкомпьютере. Используя явное представление для градиента функционала невязки, можно предложить эффективные итерационные процедуры восстановления $c(r)$ и $a(r)$. Полученные представления для градиента невязки позволяют решать обратную задачу как в 2D, так и в 3D варианте. В работах [20, 21] задача решалась в 3D случае на графических процессорах. В настоящей статье рассматриваются двумерные задачи УЗ томографии.

В силу большого объема вычислений наиболее эффективно рассматриваемые обратные задачи решаются с использованием суперкомпьютеров [22, 23]. Суперкомпьютеры позволяют решать задачи на сетке до нескольких тысяч точек по каждой координате в восстанавливаемом слое, в настоящей работе моделирование проводилось на равномерной расчетной сетке 500x500 точек. Расчеты с помощью разработанных алгоритмов и программ были проведены на процессорах общего назначения суперкомпьютеров СКЦ МГУ «Ломоносов» с помощью технологии MPI.

Волновое уравнение аппроксимировалось явной разностной схемой. Явная схема сравнительно легко распараллеливается на многопроцессорной системе, например, с помощью метода разбиения квадратной области расчетов на квадратные подобласти. Было выделено $4=2 \times 2$ подобластей, по границам которых на каждом шаге по времени выполнялся обмен данными. Следующий уровень распараллеливания связан с тем, что расчеты надо проводить для 64 источников, вычисления для каждого из которых в значительной степени независимы. Таким образом, обратная задача решалась на 256 вычислительных ядрах = 64 источника \times 2×2 подобластей. Такое разбиение по процессам позволяет достичь высокой эффективности и ускорения ~ 100 раз по сравнению с однопроцессорным вариантом. Время расчета 500 итераций составило около 3.5 часов.

На рисунке 1 приведена схема эксперимента, источники обозначены цифрой 1, приемники – 2. Источники расположены по сторонам области расчетов через равные интервалы, приемники излучения расположены также по периметру области расчетов с шагом не более $\lambda/3$. Исследуемая область G , содержащая неоднородности, расположена в центре квадрата расчетной области и окружена непоглощающей средой L с известной скоростью $v_0=1500 \text{ м/с}$.

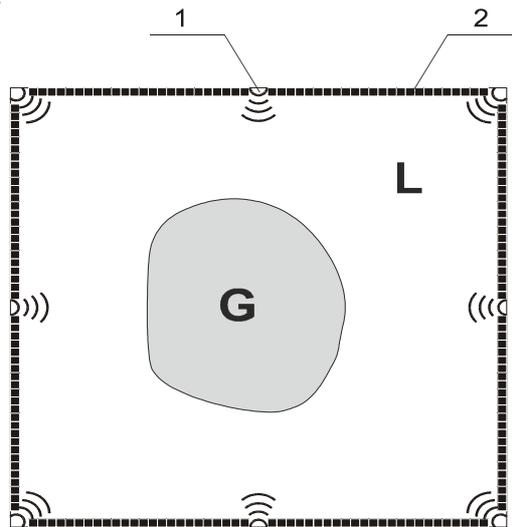


Рис. 1. Схема расположения источников и приемников в модельном эксперименте.

Экспериментальные исследования проводились на компьютерно-синтезированном 2D объекте с модельными неоднородностями. Минимальный размер неоднородности 3мм. Вариация скорости $c(x, y)$ не превышала 20%. Вариация коэффициента поглощения $a(x, y)$ в пределах объекта не превышала 50%.

Выбранные диапазоны вариации параметров соответствуют диапазонам изменения в мягких тканях человека [5].

В ходе модельных расчетов решалась прямая задача распространения ультразвуковой волны. Амплитуда волны при учете поглощения после прохождения через неоднородность падает примерно в 3 раза, а частотный спектр волны содержит в основном низкие частоты.

По полученным данным без внесения дополнительного шума решалась обратная задача. Параметры расчетной модели: длина волны излучения 5.0 мм; шаг регистрации сигналов по пространству 2.0 мм; размер области ультразвукового зондирования по горизонтали 200x200 мм.

Для решения обратной задачи использовался итерационный процесс с начального приближения $c(r) = \text{const} = c_0$ – известной вне области неоднородности. При наличии поглощения начальное приближение для поглощения выбиралось $a(r) = \text{const} = a_0$ в диагностируемой области, где a_0 полагалась равной среднему коэффициенту поглощения для мягких тканей. Вне области неоднородности, где поглощение отсутствует $a(r)$ всегда полагалась равной 0. Расчеты проводились для 64 источников излучения.

На рисунке 2 для приведены модельные сечения функции скорости распространения ультразвуковой волны $v(x, y)$ в исследуемом объекте (слева) и функции поглощения ультразвуковой волны $a(x, y)$ (справа) как функции от x, y .

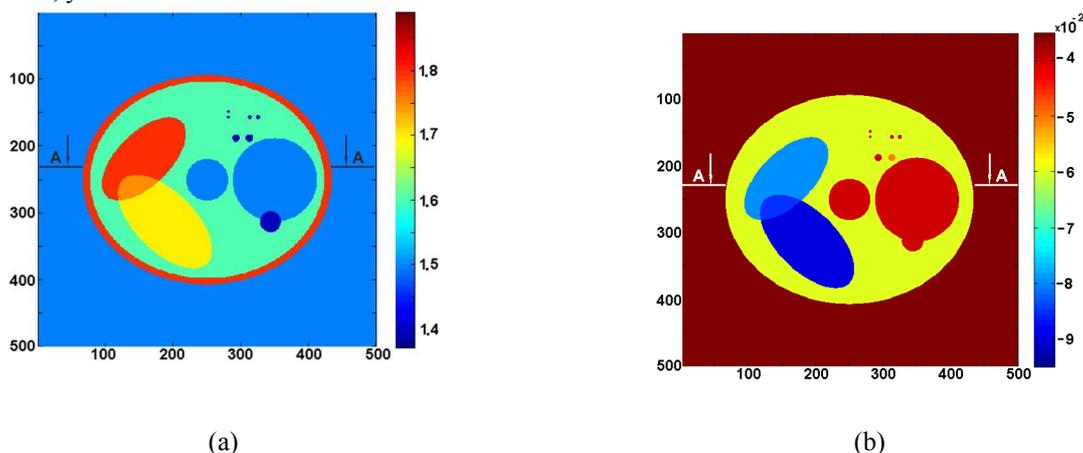


Рис. 2. Модельные изображения: (a) скоростного разреза $v(r)$; (b) поглощения $a(r)$.

На рисунках 3, 4 приведены результаты восстановления функций $v(x, y)$ и $a(x, y)$ через 500 и 3500 итераций. Видно, что удается восстановить одновременно две неизвестные функции: скорость и поглощение. Тем не менее, отчетливо можно утверждать, что функция скорости при заданных параметрах, восстанавливается за меньшее число итераций и с более высоким качеством, чем функция поглощения.

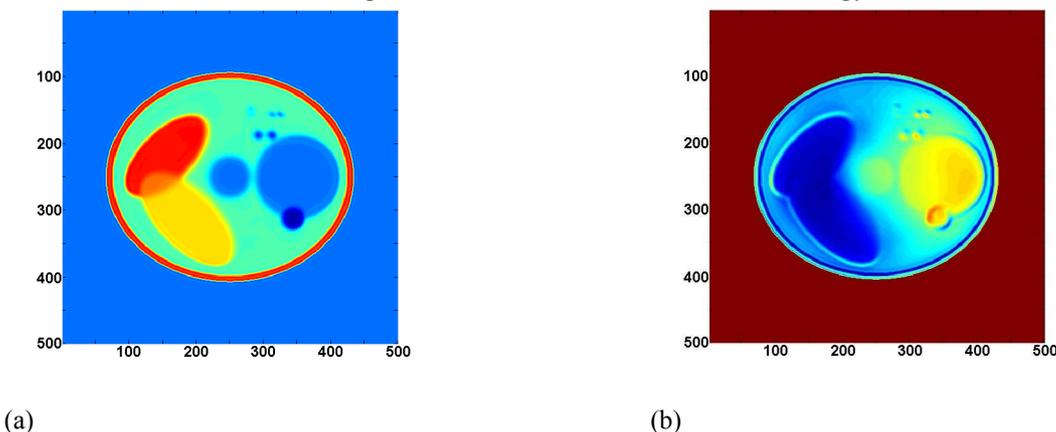


Рисунок 3. Реконструированное изображение через 500 итераций: (a) $v(r)$; (b) $a(r)$.

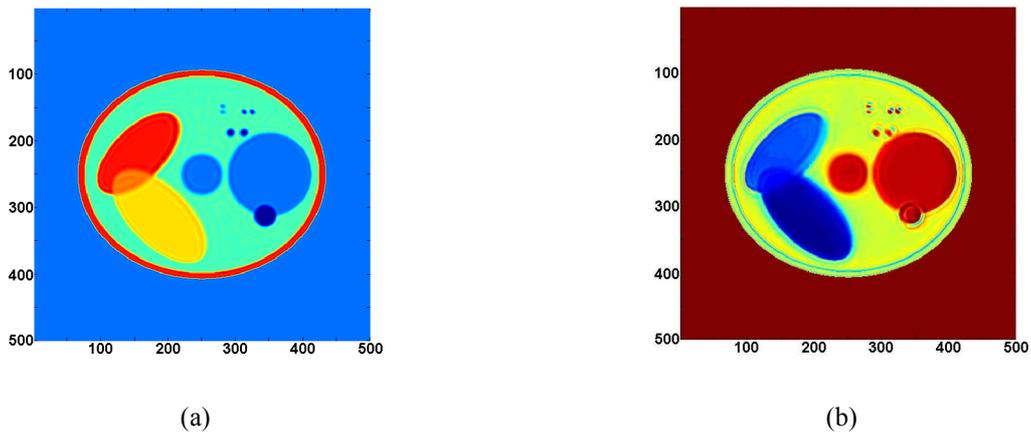


Рис. 4. Реконструированное изображение через 3500 итераций: (a) $v(r)$; (b) $a(r)$.

Тот же факт, что функция скорости восстанавливается с более высоким качеством, чем функция поглощения виден, например, из рисунка 5, где изображены графики точного и восстановленного сечений вдоль линии для скорости (a) и поглощения (b).

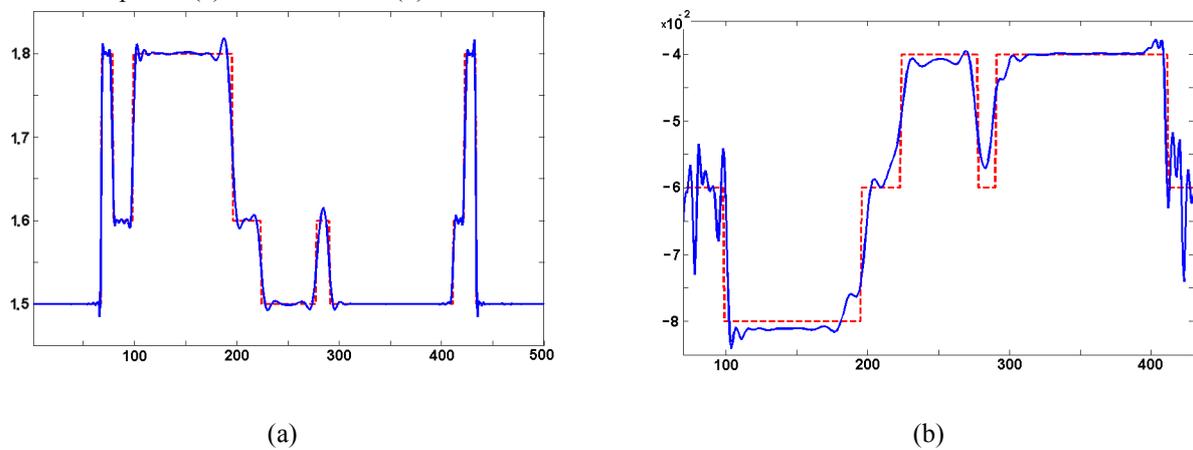


Рис. 5. График точного (пунктир) и восстановленного (сплошная) сечения вдоль линии через 3500 итераций: (a) $v(r)$; (b) $a(r)$.

Из рисунка 6 следует, что уменьшение числа источников до 4 (по сравнению с 64), также сильнее сказывается на реконструкции поглощения, качество которого становится низким.

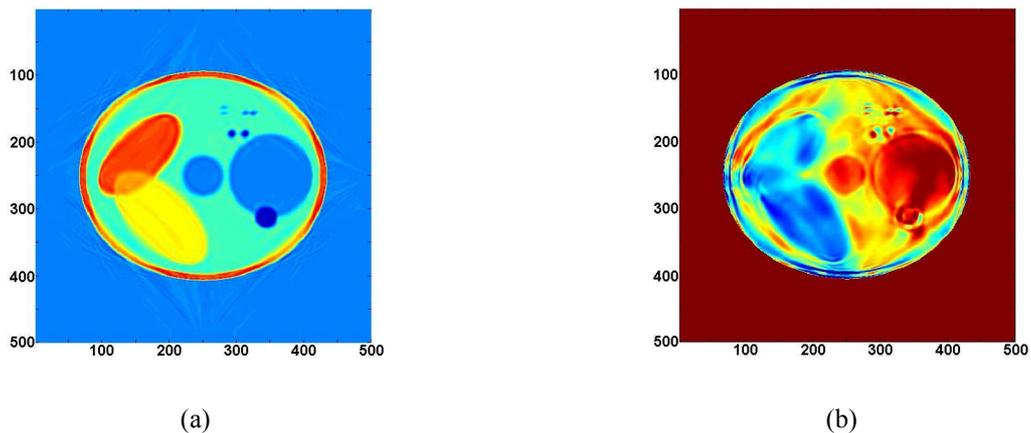


Рис. 6. Реконструированное изображение, 4 источника через 5000 итераций: (a) $v(r)$; (b) $a(r)$.

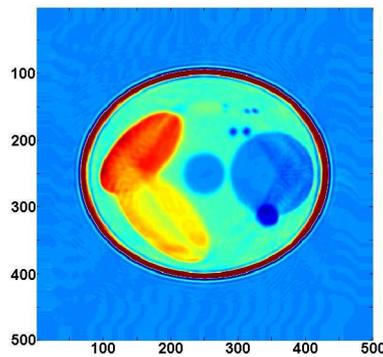


Рисунок 7. Изображение $v(r)$ реконструированное на основе модели без учета поглощения по данным полученным из модели с учетом поглощения, 500 итераций.

Более того, скорость восстанавливается неплохо даже если вообще не учитывать поглощение. Это следует из рисунка 7, где восстанавливалась скорость на основе модели без поглощения [24] по данным полученным из модели с поглощением. Результаты приведенные на рисунке 7 получены в случае, когда поглощение уменьшает амплитуду сигнала на детекторах до 3 раз!

Даже при наличии вполне значимого поглощения, реконструированный в модели без поглощения скоростной разрез достаточно хорошо соответствует точному решению. Конечно, полученный результат нельзя сравнить с идеальной картинкой, полученной в соответствующей модели с поглощением. Тем не менее, тот факт, что реконструкция скоростного разреза не так сильно зависит от модели поглощения, обнадеживает.

4. Выводы. В настоящей работе разработаны эффективные методы решения обратных задач УЗ томографии в моделях с поглощением. Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача относительно неизвестных функций характеризующих как скоростной разрез так и поглощение в диагностируемой области. Разработаны эффективные алгоритмы минимизации функционала невязки на базе вычисления градиента через решение сопряженной задачи. В рассматриваемой постановке не требуется искусственно разделять данные на прохождение и отражение.

Разработанные алгоритмы хорошо распараллеливаются при реализации на суперкомпьютерах, в том числе на суперкомпьютерах на графических картах, что позволяет в сотни раз сократить время вычислений по сравнению с персональным компьютером.

Модельные расчеты показали, что при небольших погрешностях входных данных можно восстанавливать не только скоростной разрез, но и поглощение. В моделях с поглощением скоростной разрез восстанавливается лучше, чем поглощение.

ЛИТЕРАТУРА:

1. П.К. Гайкович, А.И. Хилько, К.П. Гайкович «Метод многочастотной ближнеполюсной акустической томографии объёмных неоднородностей морского дна» // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2011. 54, № 6. 431-443.
2. А.А. Кругликов, Г.И. Лазоренко, В.Л. Шаповалов, З.Б. Хакиев, В.А. Явна «Компьютерное моделирование распространения акустических колебаний в насыпях железных дорог» // Вестник Ростовского гос. университета путей сообщения. 2012. 3. 135-140.
3. С.Г. Головина, С.Ю. Романов, В.В. Степанов «Об одной обратной задаче сейсмологии» // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1994. № 4. 16–21.
4. Е.Г. Базулин «О возможности использования в ультразвуковом неразрушающем контроле метода максимальной энтропии для получения изображения рассеивателей по набору эхосигналов» // Акуст. журн. 2013. 59, № 2. 235-254.
5. W.R. Hendee, E.R. Ritenour. Medical Imaging Physics, John Wiley & Sons 2002, p.536.
6. J. Wiskin, D.T. Borup, S.A. Johnson, M. Berggren «Non-linear inverse scattering: High resolution quantitative breast tissue tomography» // J. Acoust. Soc. Am., 2012, 131 3802-13
7. M. André, J. Wiskin, D. Borup, S. Johnson, H. Ojeda-Fournier, L. Olson «Quantitative Volumetric Breast Imaging with 3D Inverse Scatter Computed Tomography» // Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc., 2012, 1110-3.
8. R. G. Pratt, L. Huang, N. Duric, P. Littrup 2007 «Sound-speed and attenuation imaging of breast tissue using waveform tomography of transmission ultrasound data» // Medical Imaging 2007: Physics of Medical Imaging, Proceedings of the SPIE, 6510, 65104S.
9. В.А. Буров, А.С. Шуруп, Д.И. Зотов, О.Д. Румянцева «Моделирование функционального решения задачи акустической томографии для данных от квазиточечных преобразователей» // Акуст. Журн. 2013. 59, № 3. 391–407.

10. В.В. Пикалов, А.Л. Баландин, Д.Г. Родионов, М.Г. Власенко, Б.А. Князев «Терагерцовая томография низкоконтрастных объектов: алгоритмы и экспериментальные измерения» // Вестник Новосибирского гос. университета. Серия: Физика. 2010. 5, № 4. 91-99.
11. F. Natterer «Acoustic mammography in the time domain» Inst. Appl. Math. Preprint, 2008. <http://www.math.uni-muenster.de/num/Preprints/files/80.pdf>
12. A.V. Goncharky, S.Y. Romanov «Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography» // Inverse Probl. 2013. 29, № 7. 075004.
13. А.Н. Данилин, Л.Н. Пестов «Численное решение линеаризованной обратной краевой задачи для динамической системы Ламе» // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2012. 10. 81-85.
14. А.Б. Бакушинский, А.И. Козлов, М.Ю. Кокурин «Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения» // Журн. вычисл. матем. и матем. Физики. 2003. 43, № 8. 1201–1209.
15. А.В. Гончарский, С.Ю. Романов «Об одной трехмерной задаче диагностики в волновом приближении» // ЖВМиМФ, 2000 , Т40, №9. С. 1364-1367
16. А.В. Гончарский, С.Л. Овчинников, С.Ю. Романов «Об одной задаче волновой диагностики» // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2010. № 1. 7–13.
17. M.C. Hesse, L. Salehi, G. Schmitz «Nonlinear simultaneous reconstruction of inhomogeneous compressibility and mass density distributions in unidirectional pulse-echo ultrasound imaging» // Physics in medicine and biology, 2013, 58(17), 6163-78.
18. V.A. Shutilov Fundamental Physics of Ultrasound Gordon and Breach Science Publ., 1988, P.378.
19. A.V. Goncharky, S.Y. Romanov «Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation» // Phys. Med. Biol. 2014, 59, №8, 1979-2004.
20. A.V. Goncharky, S.Y. Romanov, S.Y. Seryozhnikov «Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data» // Wave Motion. 2014. 51, № 3. 389-404.
21. А.В. Гончарский, С.Ю. Романов, С.Ю. Серёжников «Задачи волновой томографии с неполным диапазоном данных» // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2014. Т.15, №2. с. 274-285.
22. С.Ю. Романов «К вопросу об масштабируемости программы для обратной задачи волновой томографии» // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 2-1. 160-167.
23. Г.М. Агаян, С.Ю. Романов «Суперкомпьютерное моделирование в задаче ультразвуковой диагностики с применением аналитических подходов» // Вестник УГАТУ, 2013, 17, № 5(58), с.260-269.
24. А.В. Гончарский, С.Ю. Романов «О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений» // Журн. вычисл. матем. и матем. Физики. 2012. 52, № 2. 263-269.