

АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА МОДЕЛИРОВАНИЯ 2D-ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЯХ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

П.А. Титов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

В работе предложен параллельный алгоритм и создана программа для численного моделирования распространения волновых полей в однородных 2D-средах с криволинейной свободой поверхностью. В работе используется метод отображений: построение в физической области криволинейной сетки, согласованной с геометрией свободной поверхности, и дальнейший «перенос» задачи на «расчетную» область простой геометрической формы (прямоугольник), в которой задача может решаться уже известными методами. Для решения задачи в «расчетной» области используется комплексирование пошагового метода преобразований Лагерра по времени и конечно-разностного метода по пространственным переменным.

Проведены численные расчеты на многопроцессорной системе для различных форм свободной поверхности.

Ключевые слова: геофизика, математическое моделирование, криволинейные сетки, пошаговый метод Лагерра, метод конечных разностей, волновое уравнение, однородная среда, 2D

1. Введение

Известно, что эффективным инструментом исследования процессов распространения волн в различных моделях сложно построенных сред является математическое моделирование.

Из всех известных методов численного моделирования распространения упругих волн наиболее гибким, в случае сложно построенных 2D неоднородных упругих сред, является разностный метод. Но при использовании данного метода неизменно сталкиваются с проблемой возникновения дифракционных волн при отражении волны от свободной поверхности. Связано это с тем, что для применения этого метода необходимо разбиение физической области на квадратные или прямоугольные ячейки, вследствие чего свободная поверхность заменяется ступенчатой функцией. Пример использования разностного метода приведен на рисунках 1 и 2.

Подобные дифракционные волны вносят погрешность в решение. Таким образом была поставлена задача об избавлении от дифракционных волн. Для этого в работе предлагается использовать криволинейные сетки.

В последнее время все большую популярность приобретает моделирование с использованием криволинейных сеток. Это весьма гибкий инструмент, нашедший уже свое применение при численном решении сингулярно-возмущенных задач, моделировании потоков плазмы в камере Токомака и др. Способы построения сеток а также их применение для решения вышеупомянутых задач приведены в [1].

Данная работа особенно важна для моделирования магматического вулкана Эльбрус, который имеет чрезвычайно сложное строение. Поставленные в 2010 году экспериментальные сейсмические наблюдения в штольне показали, что вулкан относится к типу «живущих», определились частоты, на которых наблюдается деятельность вулкана, однако интерпретация полученных результатов без адекватной математической модели практически невозможна.

2. Построение криволинейной сетки

Существует много методов построения криволинейной сетки. Основные из них описаны в работе [1]. Поскольку в данной работе рассматриваются однородные области несложной формы, то для построения сетки был выбран метод трансфинитной интерполяции (TFI-метод), описанный в [1] стр. 42-47. Так же был рассмотрен метод построения сетки с использованием обращенных уравнений Бельтрами ([1] стр. 19-42), но он не показал ощутимых преимуществ по сравнению с TFI-методом, по крайней мере на областях, рассматриваемых в работе (рис. 4, рис. 8).

Криволинейная сетка в «физической» области получается в результате взаимно-однозначного отображения равномерной сетки «расчетной» области. Таким образом, необходимо установить взаимно-однозначное соответствие между «физической» и «расчетной» областями. «Физическая область» находится в пространстве переменных (q^1, q^2) , а «расчетная» - в пространстве переменных (x, z) .

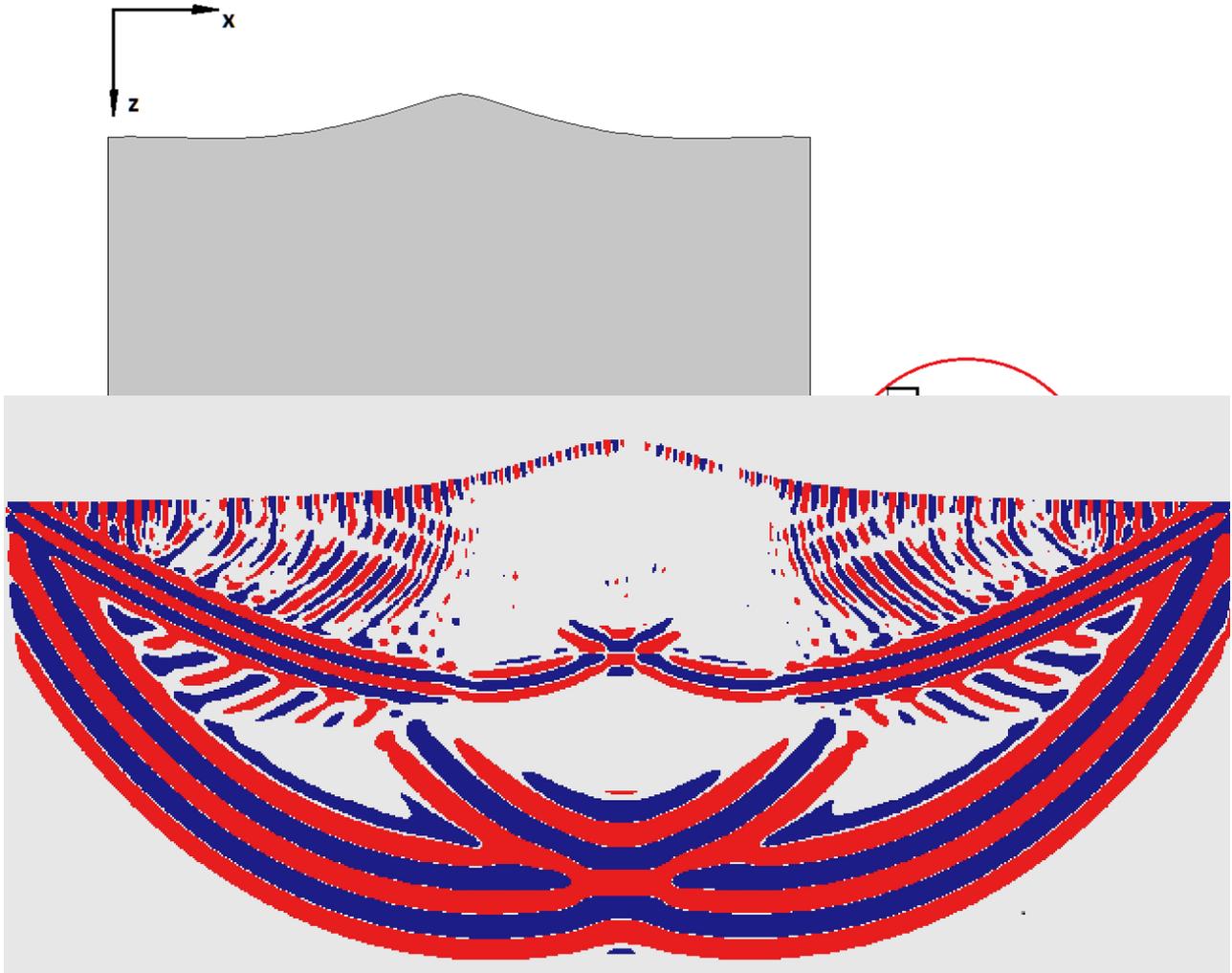


Рис. 2. При отражении от свободной поверхности видны дифракционные волны (возле поверхности).

В работе рассматривались области с прямолинейными левой, правой и нижней границей (пример в верхней части рисунка 1), для построения криволинейной сетки используем следующую формулу:

$$q^1(x, z) = x, \quad q^2(x, z) = \left(1 - \frac{z}{H}\right) f_1(x) + \frac{z}{H} f_2(x) \quad (2.1)$$

Где $f_1(x)$ - форма свободной поверхности, $f_2(x)$ - форма стороны области, противоположной свободной поверхности, H - высота «расчетной» области, W - ее ширина. В рассматриваемых областях $f_2(x)$ - константа.

3. Постановка задачи

В данной работе численное моделирование процессов распространения волн проводится на основе решения волнового уравнения.

Для расчета теоретических сейсмограмм возникающих в результате воздействия сосредоточенного источника расположенного в среде необходимо определить значения смещения u в каждой точке области в каждый момент времени. Эти значения находятся из решения начально-краевой задачи, ставящейся в пространстве (q^1, q^2) . В случае однородной среды задача примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(q^1, q^2, t)}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 u(q^1, q^2, t)}{\partial q^1 \partial q^1} + \frac{\partial^2 u(q^1, q^2, t)}{\partial q^2 \partial q^2} \right) + F(q^1, q^2, t) \\ u|_{\partial \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial S} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

V^2 – квадрат скорости распространения волн в среде
 ∂S – свободная поверхность
 $\partial \Gamma$ – граница области без свободной поверхности

В качестве источника сигнала используется источник типа «центр давления», т.е.

$$F(q^1, q^2, t) = [\sin(\pi(t-1)) + 0.8 \sin(2\pi(t-1)) + 0.2 \sin(3\pi(t-1))] \delta(q^1 - q_0^1, q^2 - q_0^2) \quad (3.2)$$

(q_0^1, q_0^2) – координаты источника

После того, как сетка построена, необходимо осуществить «перенос» исходной задачи, поставленной в «физической» области, на «расчетную» область. Для этого необходимо сделать замену переменных и переписать задачу в переменных (x, z) .

Введем следующие обозначения:

$$B_2(\xi) = \left(g^{22} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2g^{12} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + g^{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

где

$$g^{11} = \frac{\partial q^1}{\partial x} \frac{\partial q^1}{\partial x} + \frac{\partial q^2}{\partial x} \frac{\partial q^2}{\partial x} = 1 + \frac{\partial q^2}{\partial x} \frac{\partial q^2}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$g^{12} = \frac{\partial q^1}{\partial x} \frac{\partial q^1}{\partial z} + \frac{\partial q^2}{\partial x} \frac{\partial q^2}{\partial z} = \frac{\partial q^2}{\partial x} \frac{\partial q^2}{\partial z}$$

$$g^{22} = \frac{\partial q^1}{\partial z} \frac{\partial q^1}{\partial z} + \frac{\partial q^2}{\partial z} \frac{\partial q^2}{\partial z} = \frac{\partial q^2}{\partial z} \frac{\partial q^2}{\partial z}$$

В «расчетной» области уравнения (3.1) примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{V_p^2}{J^2} \left(B_2(u) - \frac{1}{J} B_2(q^2) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F(t, x, z) \\ u|_{\partial \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{z=0} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u^1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

где

$$J = \det \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) \quad (3.6)$$

Здесь

$$u(q^1, q^2) = u(q^1(x, z), q^2(x, z)) = u(x, z) \quad \text{и} \quad F(t, q^1, q^2) = F(t, q^1(x, z), q^2(x, z)) = F(t, x, z) \quad (3.7)$$

Далее к задаче (3.5) применяется преобразование Лагерра по времени.

4. Пошаговый метод Лагерра для решения волнового уравнения

Впервые данный метод был применен в работе [3].

В отличие от классических преобразований Фурье и Лапласа, применение преобразования Лагерра приводит к решению задачи для системы дифференциальных уравнений, не зависящей от параметра разделения, роль которого в данном случае имеет номер проекции Лагерра.

В результате применения этого преобразования получается задача для проекций Лагерра с номером n с правой частью, рекуррентно зависящей от проекций меньших номеров. После применения конечно-разностных аппроксимаций по пространственным переменным, решение исходной задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений со многими правыми частями, для решения которых можно использовать различные современные подходы решения линейных систем.

В работе рассматривается модификация метода, а именно преобразование Лагерра используется на последовательности конечных интервалов по времени. Полученное решение в конце одного временного отрезка используется в качестве начальных данных для решения задачи на следующем временном отрезке и т.д. Связано это с тем, что для получения решения с хорошей точностью через длительный промежуток времени необходимо очень большое количество проекций Лагерра, что критично скажется во время численной реализации. Подробно пошаговый метод преобразования Лагерра описан в работе [2].

При использовании данного подхода появляется необходимость выбора 4-х параметров: количество проекций Лагерра N , масштабного множителя, необходимого для аппроксимации решения функциями Лагерра h , экспоненциального коэффициента весовой функции μ , используемой для нахождения решения на конечном временном интервале и длительности этого интервала τ . Способ выбора этих параметров предложен в работе [2].

Мы же ограничимся лишь основными терминами и непосредственно видом задачи после примененного к ней преобразования Лагерра.

Полиномы Лагерра имеют вид:

$$L_0(t) = 1 \quad (4.1)$$

$$L_1(t) = 1 - t \quad (4.2)$$

$$L_{k+1}(t) = \frac{1}{k+1} \left((2k+1-t)L_k(t) - kL_{k-1}(t) \right), \quad k \geq 1 \quad (4.3)$$

$$L_k(t) = - \sum_{i=0}^{k-1} L_i(t), \quad k \geq 1 \quad (4.4)$$

Функции Лагерра имеют вид:

$$l_n(t) = e^{-\frac{t}{2}} L_n(t), \quad n \geq 0 \quad (4.5)$$

Они образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0, \infty)$.

Преобразование

$$v_n = \int_0^\infty v(t) l_n(ht) dt \quad (4.6)$$

называется прямым преобразованием Лагерра, а v_n - проекциями Лагерра функции $v(t)$.

Обратное преобразование Лагерра имеет вид:

$$v(t) = \sum_{n=0}^\infty v_n l_n(ht) \quad (4.7)$$

Идея метода состоит в получении приближенного значения

$$v(\tau) \approx \sum_{n=0}^N v_n l_n(\tau h) \quad (4.8)$$

и значения

$$u(\tau) = e^{\mu\tau} v(\tau), \quad \dot{u}(\tau) = \mu u(\tau) + e^{\mu\tau} \dot{v}(\tau) \quad (4.9)$$

выбираем в качестве начальных данных для решения задачи при $t > \tau$.

Теперь покажем нашу задачу после примененного к ней преобразования Лагерра. Задача сводится к решению линейной системы из N уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\left(\mu + \frac{h}{2} \right)^2 + A \right] v_0 &= \left(\frac{h^2}{2} + 2\mu h \right) v^0 + h v^1 + f_0, \\ \left[\left(\mu + \frac{h^2}{2} \right)^2 + A \right] v_1 &= -(h^2 + 2\mu h) + \left(\frac{2}{2} h^2 + 2\mu h \right) + h v_1 + f_1, \\ \left[\left(\mu + \frac{h}{2} \right)^2 + A \right] (v_n - 2v_{n-1} + v_{n-2}) + 2\mu h (v_{n-1} - v_{n-2}) + h^2 v_{n-1} &= f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ v_n|_{\partial\Gamma} &= 0, \quad n=0, \dots, N \end{aligned} \right. \quad (4.10)$$

Условие на свободной поверхности, аналогично случаю, описанному в [4], запишется так:

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} = a \frac{\partial v_i}{\partial z} + b \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \quad i=0, \dots, N \quad (4.10.1)$$

$$b = \frac{-g^{12}}{\sqrt{g^{11}J}}, \quad a = \frac{\sqrt{g^{11}}}{J}$$

где

$$A(v_i) = \frac{-V_p^2}{J^2} \left(B_2(v_i) - \frac{1}{J} B_2(q^2) \frac{\partial v_i}{\partial z} \right), \quad i=0, \dots, N \quad (4.11)$$

$$f_n = f_n(x, z) = \int_0^{\infty} F(t, x, z) l_n(ht) dt \quad (4.12)$$

Решив систему, далее получаем

$$v(\tau) \approx \sum_{n=0}^N v_n l_n(\tau h) \quad (4.13)$$

а затем

$$u(\tau) = e^{\mu\tau} v(\tau), \quad \dot{u}(\tau) = \mu u(\tau) + e^{\mu\tau} \dot{v}(\tau) \quad (4.14)$$

выбираем в качестве начальных данных для решения задачи при $t > \tau$.

5. Метод решения задачи 4.10-4.10'

Для решения задачи 4.10-4.10' используется комплексирование метода конечных разностей по пространству и пошагового метода Лагерра.

Для численного решения необходимо переписать задачу 4.10-4.10' в разностном виде. Все уравнения выписаны со вторым порядком по пространству (уравнения 5.1-5.6 предложены автором).

Расчетная область имеет размеры $W \times H$, $M \times N$ точек.

Для каждой проекции Лагерра v_n и соответствующей ей правой части G_n разностная задача имеет вид:

$$\left(\left(\mu + \frac{h}{2} \right)^2 + \hat{A}_2 \right) v_{i,j} = G_{i,j} \quad i=2, \dots, M-1, \quad j=2, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

на $\partial \Gamma$: $v_{1,j} = v_{M,j} = v_{i,N} = 0, \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq N$

на ∂S : $i=2, \dots, M-1$

$$b \geq a, a \geq 0, b \geq 0: v_{i,1} = \frac{2}{3b} \left(2(b-a)v_{i+1,1} + \frac{a-b}{2}v_{i+2,1} + 2av_{i+1,2} - \frac{a}{2}v_{i+2,3} \right)$$

$$a \geq b, a \geq 0, b \geq 0: v_{i,1} = \frac{2}{3a} \left(2(a-b)v_{i,2} + \frac{b-a}{2}v_{i,3} + 2bv_{i+1,2} - \frac{b}{2}v_{i+2,3} \right)$$

$$a \geq -b, a \geq 0, b \leq 0: v_{i,1} = \frac{2}{3a} \left(2(a+b)v_{i-1,1} + \frac{a+b}{2}v_{i-2,1} + 2av_{i-1,2} - \frac{a}{2}v_{i-2,3} \right)$$

$$-b \geq a, a \geq 0, b \leq 0: v_{i,1} = \frac{-2}{3b} \left(2(a+b)v_{i-1,1} + \frac{a+b}{2}v_{i-2,1} + 2av_{i-1,2} - \frac{a}{2}v_{i-2,3} \right)$$

$$b=0, a=1: v_{i,1} = \frac{2}{3} \left(2v_{i,2} - \frac{1}{2}v_{i,3} \right)$$

где

$$\hat{A}(u_{i,j}) = \frac{V_p^2}{J_{i,j}^2} \left(\hat{B}_2(u_{i,j}) - \frac{1}{J_{i,j}} \hat{B}_2(q^2) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta_z} \right) \quad (5.2)$$

$$\hat{B}_2(u_{i,j}) = \left(g_{i,j}^{22} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2} - \frac{g_{i,j}^{12}}{2} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{\Delta_x \Delta_z} + g_{i,j}^{11} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_z^2} \right) \quad (5.3)$$

$$g_{i,j}^{11} = 1 + \frac{q_{i+1,j}^2 - q_{i-1,j}^2}{2\Delta_x} \frac{q_{i+1,j}^2 - q_{i-1,j}^2}{2\Delta_x}, \quad i=2, \dots, M-1, \quad j=1, \dots, N-1 \quad (5.4)$$

$$g_{i,1}^{11} = 1 + \frac{q_{i+1,1}^2 - q_{i-1,1}^2}{2\Delta_x} \frac{-5q_{i,2}^2 + 8q_{i,3}^2 - 3q_{i,4}^2}{2\Delta_z}, \quad i=2, \dots, M-1$$

$$g_{i,j}^{12} = \frac{q_{i+1,j}^2 - q_{i-1,j}^2}{2\Delta_x} \frac{q_{i,j+1}^2 - q_{i,j-1}^2}{2\Delta_z}, \quad i=2, \dots, M-1, \quad j=2, \dots, N-1$$

$$q_{i,j}^{22} = \frac{q_{i,j+1}^2 - q_{i,j-1}^2}{2\Delta_z} \frac{q_{i,j+1}^2 - q_{i,j-1}^2}{2\Delta_z}, \quad i=2, \dots, M-1, \quad j=1, \dots, N-1$$

$$J_{i,j} = \frac{q_{i,j+1}^2 - q_{i,j-1}^2}{2\Delta_z}, \quad i=2, \dots, M-1, \quad j=2, \dots, N-1 \quad (5.5)$$

$$J_{i,1} = \frac{-3q_{i,1}^2 + 4q_{i,2}^2 - q_{i,3}^2}{2\Delta_z}, \quad i=2, \dots, M-1$$

$$q_{i,j}^2 = S_i + \frac{j-1}{M-1}(H - S_i) \quad (5.6)$$

$$S_i = S((i-1)\Delta_x), \quad i=1, \dots, M \quad \text{-формула свободной поверхности} \quad (5.7)$$

Для решения вышеприведенной схемы (5.1) был задействован метод простой итерации.

Подробно суть метода изложена в [5].

Выбор этого метода обусловлен тем, что система (5.1), переписанная в матричном виде, будет иметь матрицу с большим диагональным преобладанием, что обеспечит быструю сходимость метода.

Далее, получив все значения $v_{n,i,j}$, находим

$$v_{i,j}(\tau) = \sum_{n=0}^N v_{n,i,j} l_n(\tau h) \quad (5.8)$$

отсюда, используя формулу

$$\dot{v}(t) = w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n l_n(ht) \quad (5.9)$$

$$w_0 = h \left(\frac{v_0}{2} - v(0) \right), \quad w_n = w_{n-1} + \frac{h}{2}(v_n + v_{n-1}), \quad n=1, 2, \dots$$

найдем $\dot{v}_{i,j}$, затем

$$u_{i,j}(\tau) = e^{\mu\tau} v_{i,j}(\tau), \quad \dot{u}_{i,j}(\tau) = \mu u_{i,j}(\tau) + e^{\mu\tau} \dot{v}_{i,j}(\tau) \quad (5.10)$$

и, наконец, значения

$$u_{i,j}^0 = u_{i,j}(\tau), \quad u_{i,j}^1 = \dot{u}_{i,j}(\tau) \quad (5.11)$$

берутся в качестве начальных данных для следующего временного отрезка:

$$v_{i,j}^0 = u_{i,j}^0, \quad v_{i,j}^1 = -\mu u_{i,j}^0 + u_{i,j}^1 \quad (5.12)$$

На отрезке $[0, \tau]$ начальные данные выглядят так:

$$u_{i,j}^0 = u_{i,j}(0), \quad u_{i,j}^1 = \dot{u}_{i,j}(0) \quad (5.13)$$

$u_{i,j}(0)$ и $\dot{u}_{i,j}(0)$ берутся из начальных данных задачи.

будут начальными данными для следующего временного отрезка $[\tau, 2\tau]$. Далее аналогично находим $v_{i,j}(2\tau)$, $\dot{v}_{i,j}(2\tau)$ и т.д.

6. Программная реализация

Алгоритм программно реализован на универсальном языке программирования FORTRAN. Так же программа была адаптирована для вычислений на многопроцессорной системе с использованием MPI. Для этого использовалась одномерная декомпозиция расчетной области (рис. 3). Красные линии — зоны перекрытия данных, в которые происходит обмен между соседними процессами. Предварительные численные расчеты проведены на кластере ССКЦ НК-30Т, максимальное количество ядер — 160.

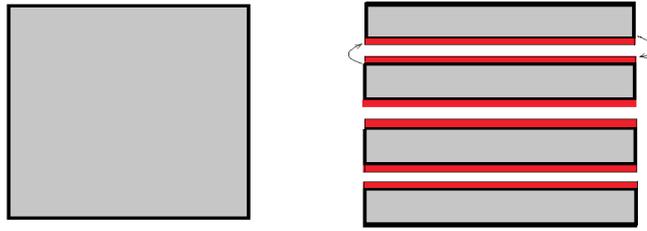


Рис. 3. Декомпозиция расчетной области на слои.

7. Результаты расчетов

Далее переходим к результатам расчетов. Здесь приведем 2 примера — для области с «горкой» и для области со «впадиной». В обоих случаях форма поверхности выражается одной и той же функцией ($\cos(x)$), но с разными знаками \pm .

Более подробное описание для области с «горкой»:

Представленные размеры на рисунке 4 — количество длин волн (размер всей области не важен с точки зрения изучаемых эффектов, важны размеры криволинейной части поверхности). Красная точка — расположение источника. На рисунке 5 — соответствующая криволинейная сетка, на рисунке 6 — результаты моделирования. Скорость волны во всех расчетах — 1 км/с.

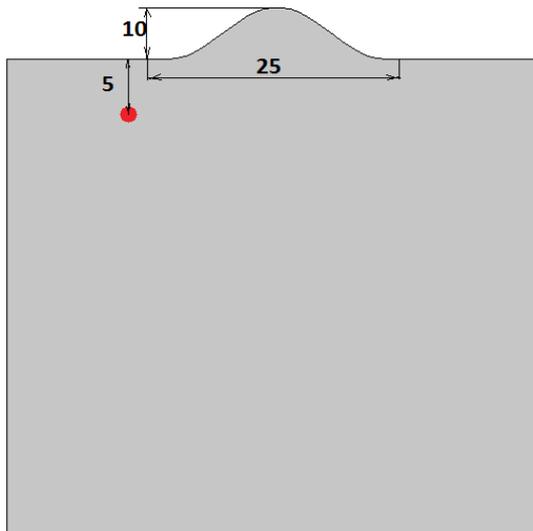


Рис. 4. Область с «горкой»

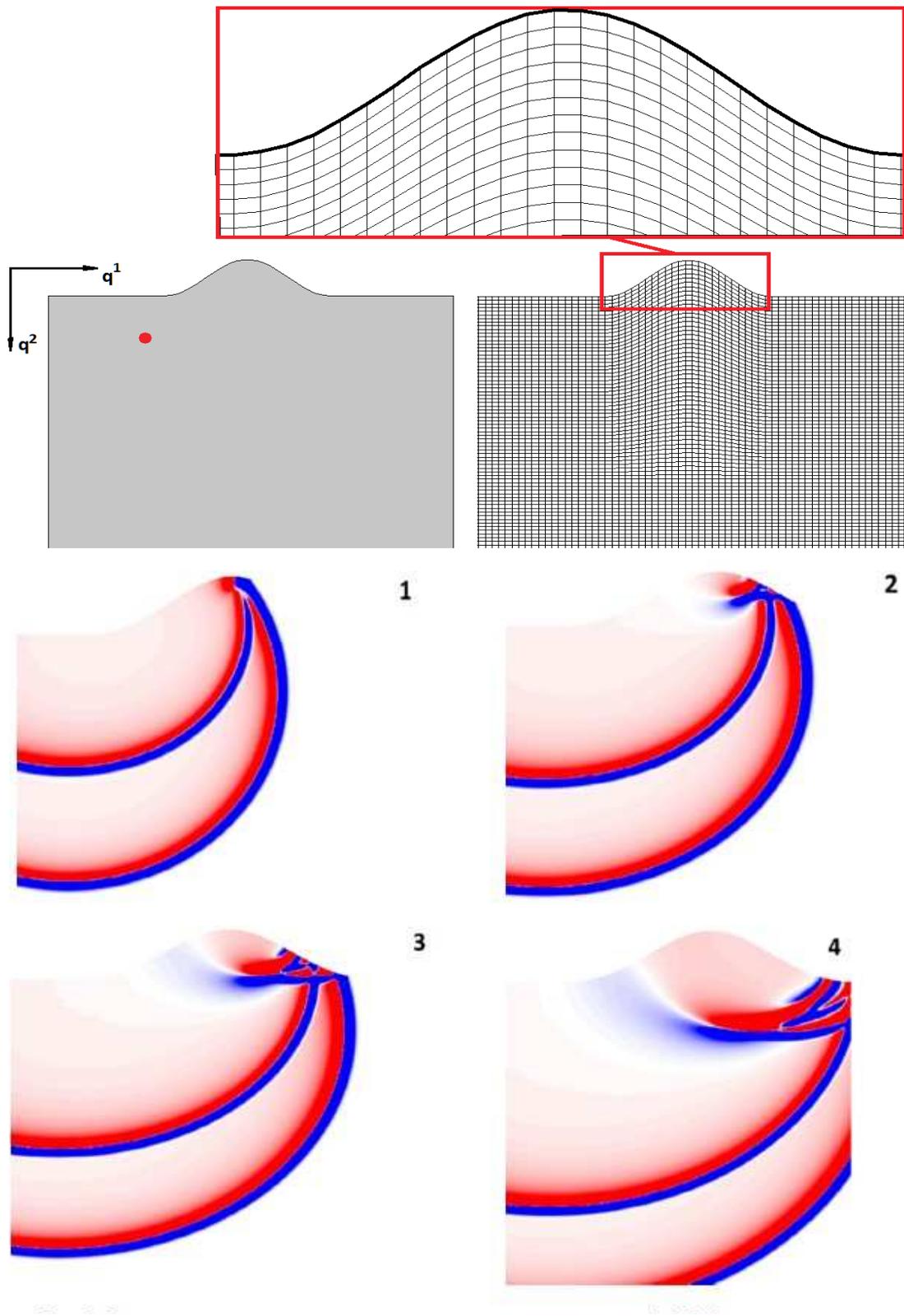


Рис. 6. Снимки волнового поля в последовательные моменты времени 1, 2, 3, 4.

Можно отчетливо наблюдать, что по сравнению со снимками волнового поля на рисунке 2, здесь отсутствуют дифракционные волны при отражении от поверхности.

Аналогичные расчеты проведены для области со «впадиной». Рисунок 7 — область, рисунок 8 — снимки волнового поля.

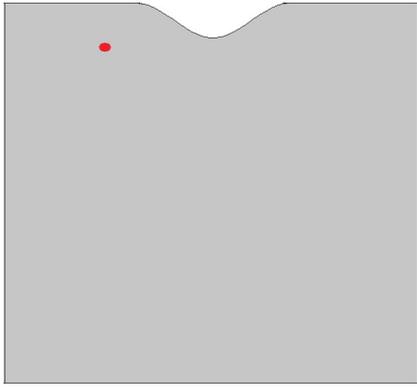


Рис. 7. Область со «впадиной»

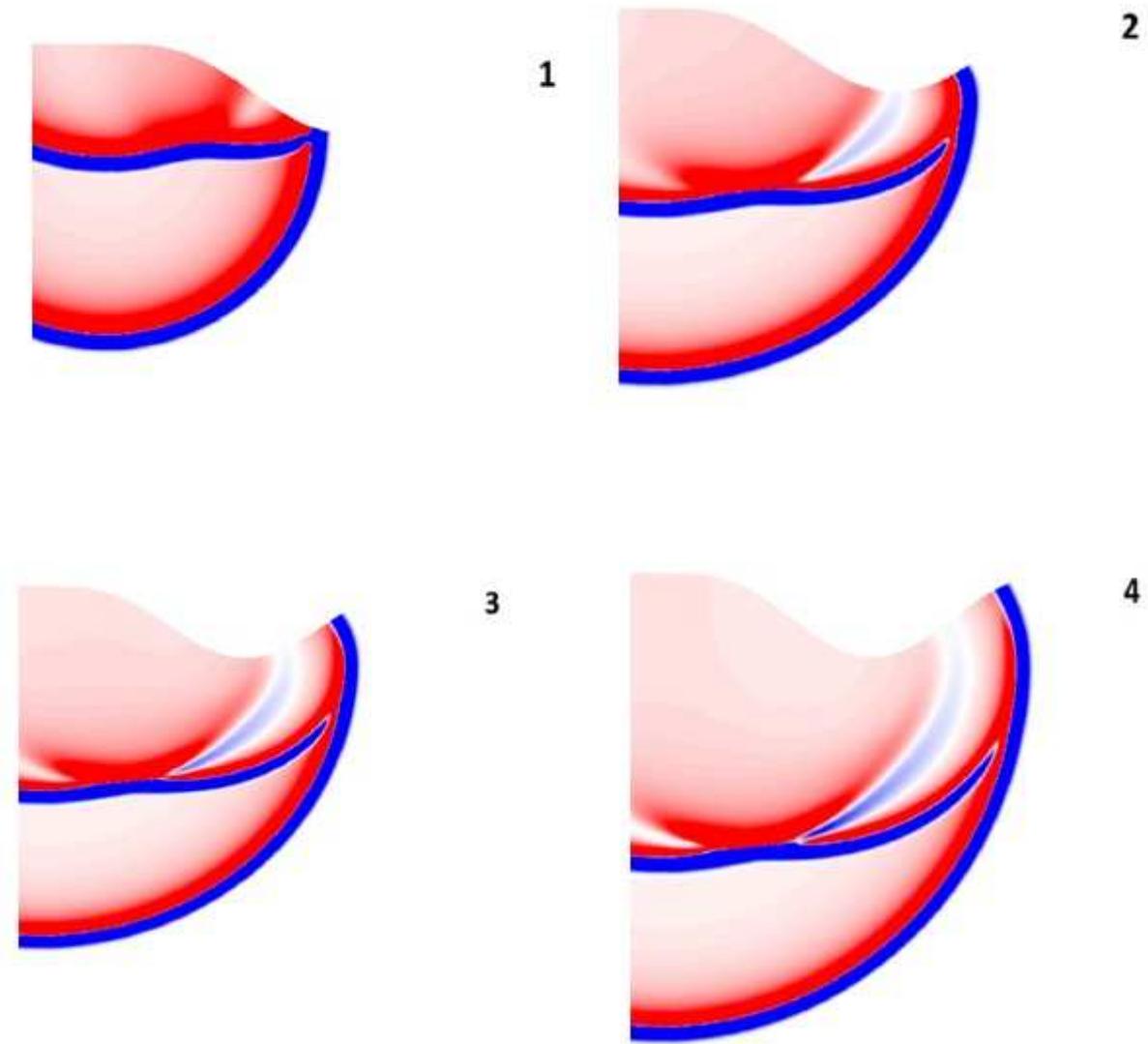


Рис. 8. Снимки волнового поля в последовательные моменты времени 1, 2, 3, 4.

Здесь можно также наблюдать отсутствие дифракционных волн при отражении от свободной поверхности.

Проведенные расчеты показывают перспективность дальнейшего использования криволинейных сеток для моделирования волновых полей в средах со сложной геометрией свободной поверхности.

8. Заключение

Разработан алгоритм построения криволинейных сеток, согласованных с геометрией свободной поверхности. Программно реализовано отображение криволинейной сетки физической области на регулярную сетку расчетной области.

Рассмотрено применение пошагового метода Лагерра для моделирования 2D волновых полей в средах с криволинейной свободной поверхностью. Получена аппроксимация граничных условий на свободной поверхности со 2-м порядком по пространству. Удалось избавиться от дифракционных волн при отражении от поверхности.

Разработаны параллельные алгоритм и программа для моделирования 2D волновых полей в случае волнового уравнения и проведены численные расчеты на многопроцессорных вычислительных комплексах. Практически без изменений алгоритм может быть реализован для вычислений с использованием как графических ускорителей, так и системы Intel Phi.

Предполагается также в дальнейшем разработанный алгоритм применить для моделирования волновых полей в сложнопостроенных 3D-средах с криволинейной свободной поверхностью.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00231, а также программы фундаментальных исследований РАН №4 проект 4.9. «Модельные и экспериментальные исследования вулканических структур методами активной и пассивной сейсмологии».

ЛИТЕРАТУРА:

1. В.Д. Лисейкин, А.Д. Рычков, А.В. Кофанов «Технология адаптивных сеток для решения прикладных задач: Монография» // Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 2011. 160 с. ISBN 978-5-94356-981-4.
2. Г.В. Демидов, В.Н. Мартынов «Пошаговый метод решения эволюционных задач с использованием функций Лагерра» // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010 Том 13, №4, стр. 413-422
3. V.G. Mikhailenko «Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problem.»//Appl. Math. Lett. 1999, 12, pp105-110.
4. Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин «Лекции по разностным схемам на подвижных сетках. Часть 2. Задачи для уравнений в частных производных с двумя пространственными переменными» // Редакционно-издательский центр КазНУ им. Аль-Фараби, 2006 стр.87-90.
5. Д.К. Фадеев, В.Н.Фадеева «Вычислительные методы линейной алгебры» // Физматгиз 1960 стр.214-220.