

Моделирование взаимодействия лазерного излучения экстремальной интенсивности с пространственно-неоднородной плазмой

И.Н. Цымбалов, Д.А. Гожев, В.В. Прокудин,
А.М. Сенькевич, А.Б. Савельев.

*Физический факультет и Международный лазерный центр
Московского государственного университета им. М.В.
Ломоносова*

П.А. Ксенофонов, А.В. Брантов, В.Ю. Быченков.
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва.

Д.В. Романов. Красноярский государственный педагогический
университет

Содержание

- Лазерная плазма и лазерное ускорение частиц
- Моделирование лазерной плазмы методом крупных частиц
- Ускорение электронов в плазме твердотельных мишеней
- Оптическая диагностика плазмы
- Оценка пиковой интенсивности по энергиям электронов
- Ускорение электронов в микроструктурированных мишенях

Взаимодействие электронов с лазерным полем

- **Сверхсильное поле:** внешнее поле сравнимо, либо превышает кулоновское поле

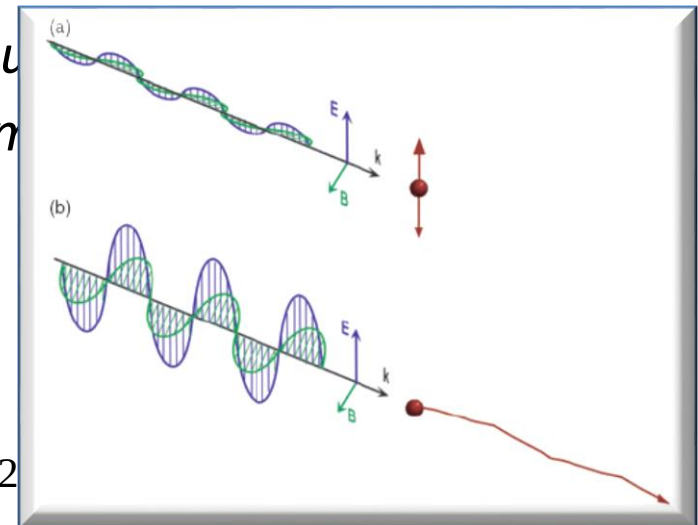
$$E \propto \frac{q}{a^2} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ В/см}$$

$$I \approx 10^{16} \text{ Вт/см}^2$$

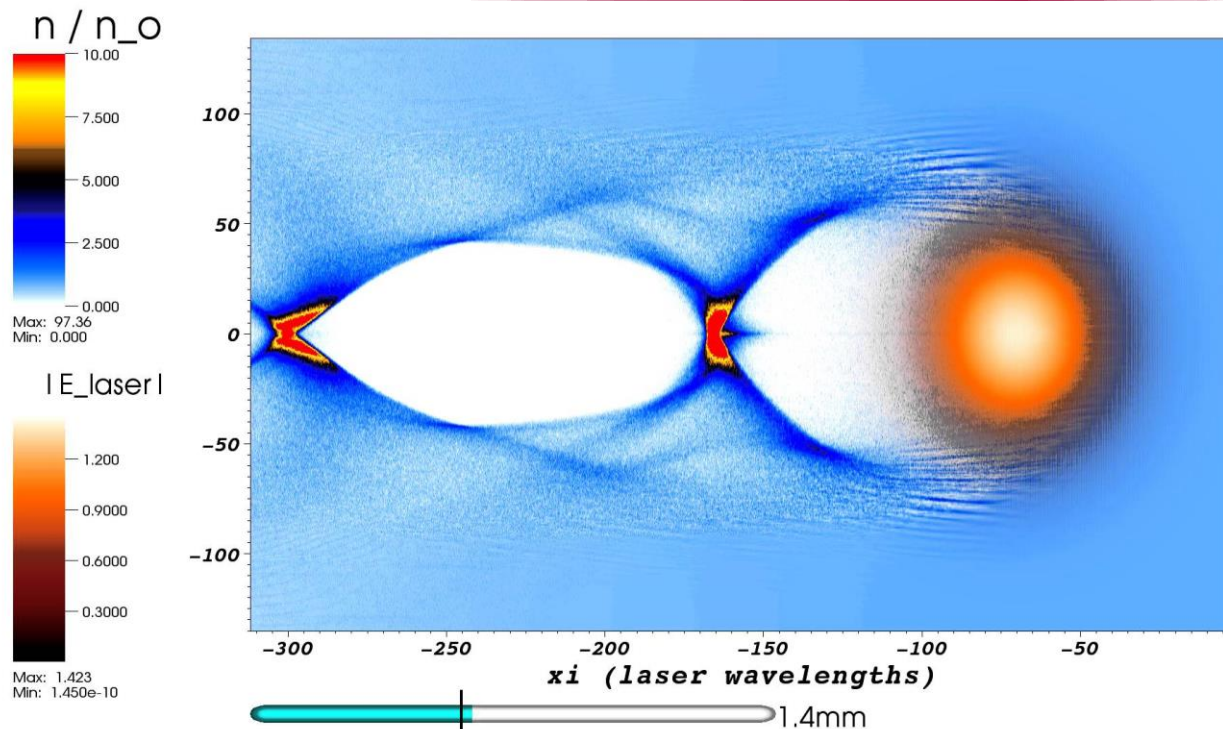
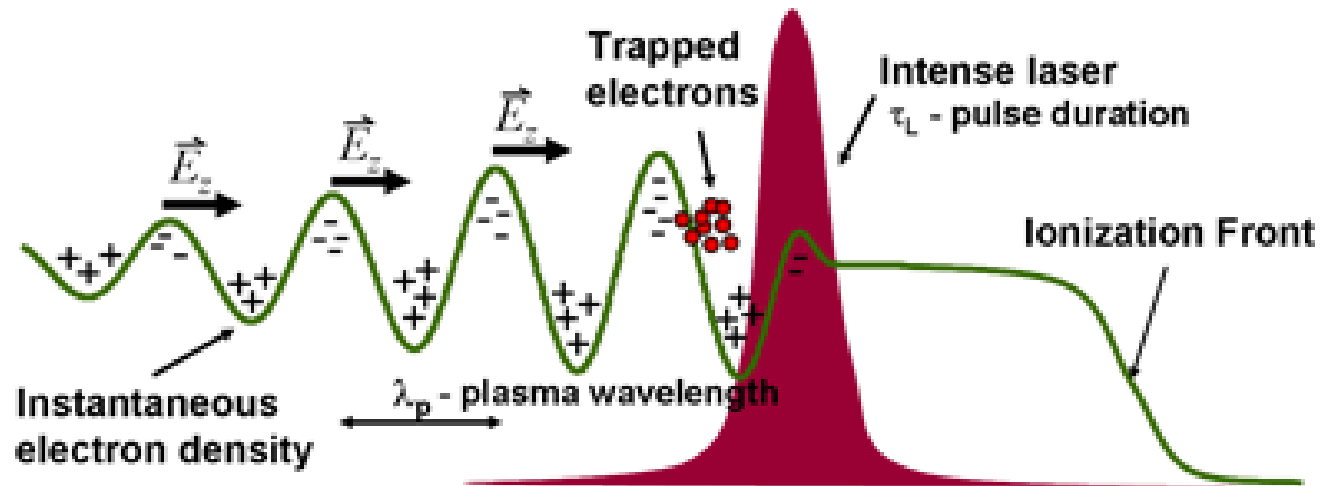
- **Релятивистское поле:** движение электрона во внешнем поле становится релятивистским

$$m\ddot{x} = qE_0 e^{i\omega t} \quad \frac{qE_0}{m\omega} \approx c$$

$$\dot{x} = \frac{qE_0}{m\omega} e^{i\omega t + \pi/2} \quad \frac{m}{2} \left(\frac{qE_0}{m\omega} \right)^2 \approx mc^2$$



Ускорение в кильватерной волне

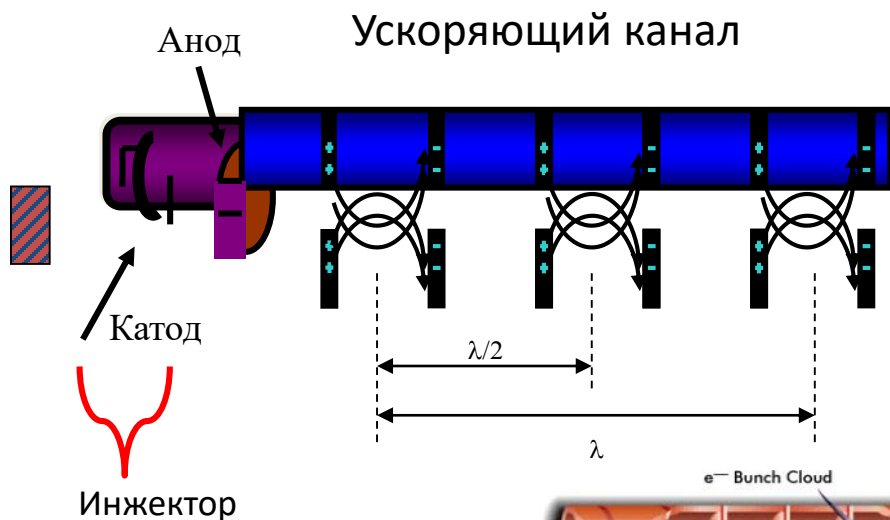


Классические и плазменные ускорители

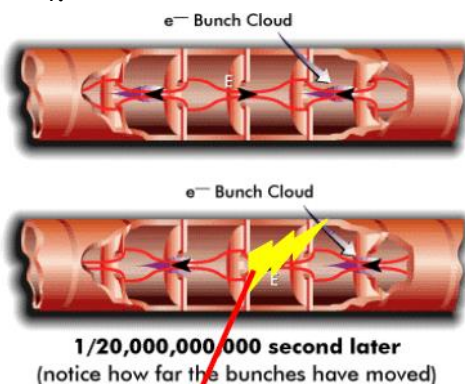
E-field_{max} $\approx 10\text{-}100$ MV/m

E-field_{max} $\approx 10\text{-}100$ GV/m

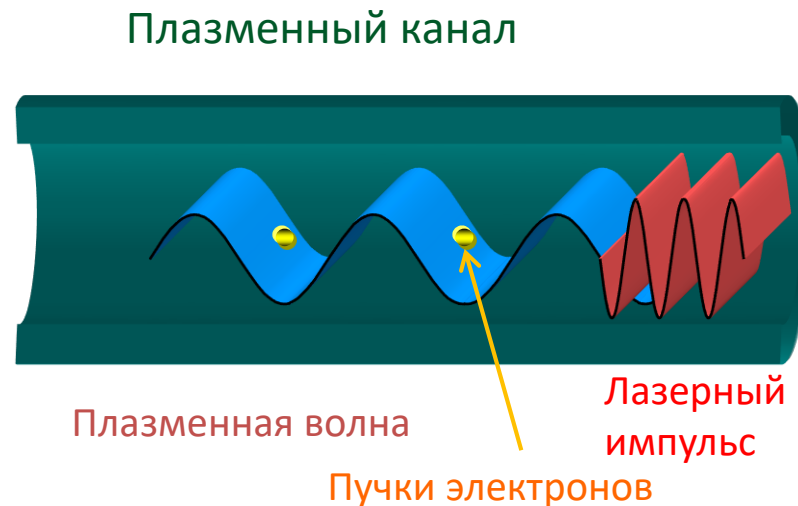
Определяется пробоем материала



$1\text{ GeV} \Rightarrow 0.1\text{ km}$
 $30\text{ GeV} \Rightarrow 3\text{ km (SLAC)}$
 $1\text{ TeV} \Rightarrow 100\text{ km}$



breakdown



Высокие ускоряющие поля
Компактность
Плазменный канал для
распространения лазерного
импульса

Электроны 2 ГэВ на нескольких мм !

Цели лазерного ускорения частиц

Контролируемый источник высокоэнергичных частиц «на столе»

- ЛТС. Ионы для быстрого поджига [Roth PRL2001, Быченков ФП2001, Гуськов КЭ2001]
- Производство короткоживущих изотопов [Fritzler APL2003]
- Диагностика и радиография [Borghesi PoP2002]
- Инжектор для ионного и электронного ускорителей
- Медицина (адронная терапия рака) [Буланов ФП2002]
- Ядерная физика [Быченков ЖЭТФ99]
- Астрофизика «на столе»
- Нейтронный источник [Roth PRL2013]
- Ионная имплантация
- Вещество в экстремальных состояниях

Моделирование взаимодействия лазерного импульса с плазмой

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{i,e}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_{i,e} \frac{\partial f_{i,e}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$
$$\mathbf{F}_{i,e} = q_{i,e} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right), \quad \text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0.$$

$$\mathbf{j} = \sum_{i,e} q_{i,e} \int f_{i,e} \mathbf{v} d\mathbf{v}, \quad \rho = \sum_{i,e} q_{i,e} \int f_{i,e} d\mathbf{v}$$

Нелинейная система уравнений – единственный путь решения численные
вычисления

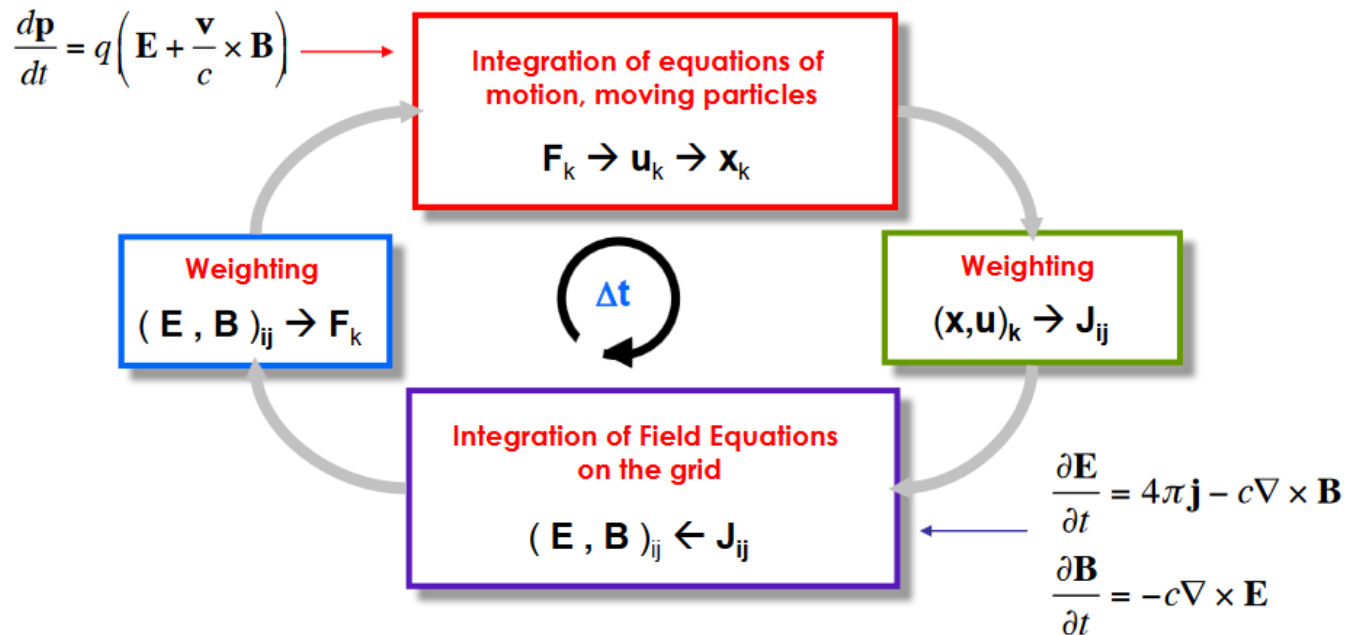
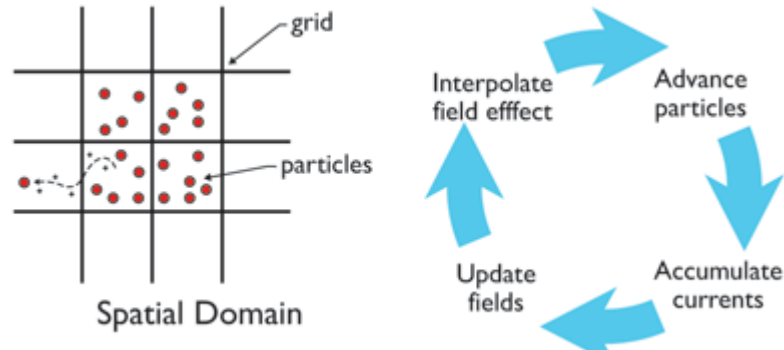
Трёхмерный релятивистский параллельный численный код используется для расчетов взаимодействия короткого мощного лазерного импульса (10^{18} - 10^{22} Вт/см²) с плазмой.

Кинетическое уравнение решается методом частиц
Уравнения Максвелла – разностная схема на сетке

PIC simulation

3D3V PIC code Mandor

<http://mandor.ilc.edu.ru/mandor3>



Численный код Мандор

Mandor — это релятивистский электромагнитный 3D3V PIC код, предназначенный для изучения идеальной бесстолкновительной плазмы.

Физика:

- Плазма бесстолкновительная, описывается кинетическим уравнением Власова.
- ЭМ поле описывается уравнениями Максвелла.
- Плазма многокомпонентная, ионизации/рекомбинации нет.
- Импульсы короткие, энергия любая (уравнения движения релятивистские).

Программа:

- Плазма имеет произвольную форму и ориентацию.
- Импульсы фокусируются в любой точке области.
- Импульсы впускаются только вдоль оси X (возможно задание нескольких импульсов).
- Электромагнитная часть решается явной схемой второго порядка аппроксимации по времени и пространству, использующей центральные разности и смещённые сетки.
- Кинетическое уравнение решается методом характеристик: уравнения движения интегрируются с помощью схемы Бóриса.
- Плотность тока находится использованием оригинального алгоритма, разработанного в пакете "Умка".
- Использование схемы Yee гарантирует сохранение с численной точностью $\text{div } \mathbf{B}$. Схема Бориса известна хорошей производительностью и точностью. Алгоритм определения плотности тока гарантирует выполнение закона сохранения заряда

Технические детали кода

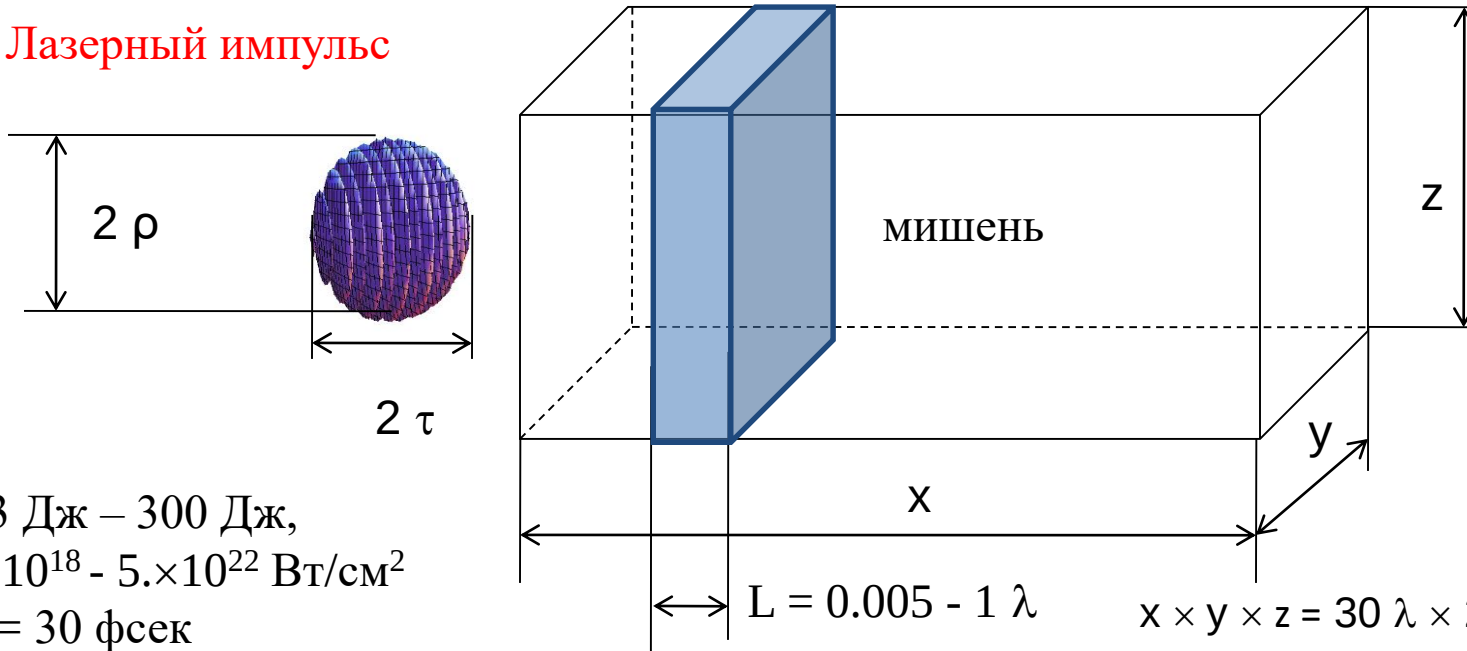
- работа в 1D/2D/3D режиме без потери памяти и производительности (ненужные операции убраны средствами препроцессора языка C)
- конфигурационные параметры кода вынесены в Makefile – нет необходимости ручного изменения текста программы для активации дополнительных тестов
- произвольная комбинация граничных условий (периодические, зеркало, поглощающие граничные условия Мура) по всем шести границам
- гибкая система создания начального состояния системы, дающая возможность создавать произвольные наборы базовых элементов (комплексных конфигураций фольг, пучков, плазм, волн) и преобразований (сдвиги функций распределений)
- тихий старт (малошумящее начальное распределение маркеров в фазовом пространстве)
- возбуждение волн малой амплитуды с произвольной поляризацией и ветвью дисперсионной кривой (включая неустойчивые) с численной точностью позволяет исследовать эволюцию систем с заданным начальным спектром волн в широком динамическом диапазоне без возбуждения переходного процесса
- одновременный выпуск-выпуск сфокусированного лазерного импульса
- большая группа тестов, автоматизация процесса проведения тестов и анализа данных расчёта

Диагностики

- полная энергия по видам (кинетическая, E, H)
- распределение сеточных величин (ЭМ-полей, плотности тока, плотности заряда) с заданным шагом по времени
- полное состояние системы (для обработки функций распределения)
- доступно произвольное число зондов для записи параметров в точке с максимальным разрешением по времени (анализ высокочастотной части спектра при сохранении дискового места)

Постановка задачи для моделирования взаимодействия лазерного излучения с плазмой

Лазерный импульс



0.03 Дж – 300 Дж,
 $5 \times 10^{18} - 5 \times 10^{22} \text{ Вт/см}^2$

$2\tau = 30 \text{ фсек}$

$2\rho = 4 \text{ мкм}$

линейная поляризация

Мишень { электроны
 тяжелые ионы C^{+6}
 протоны

$x \times y \times z = 30\lambda \times 20\lambda \times 20\lambda$

$\Delta x \times \Delta y \times \Delta z = \lambda/200 \times \lambda/20 \times \lambda/20$

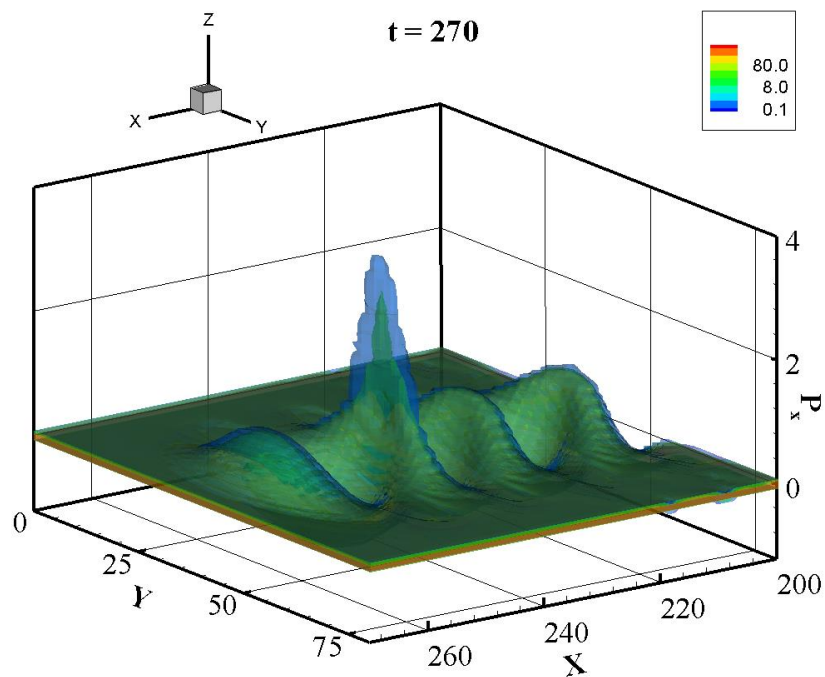
Сетка : (30 200 20 20 20 20) 9 8 / $1024^3 \sim 60 \text{ Гб}$

Частицы : 10 (1 200 20 20 20 20) 8 8 / $1024^3 \sim 20 \text{ Гб}$

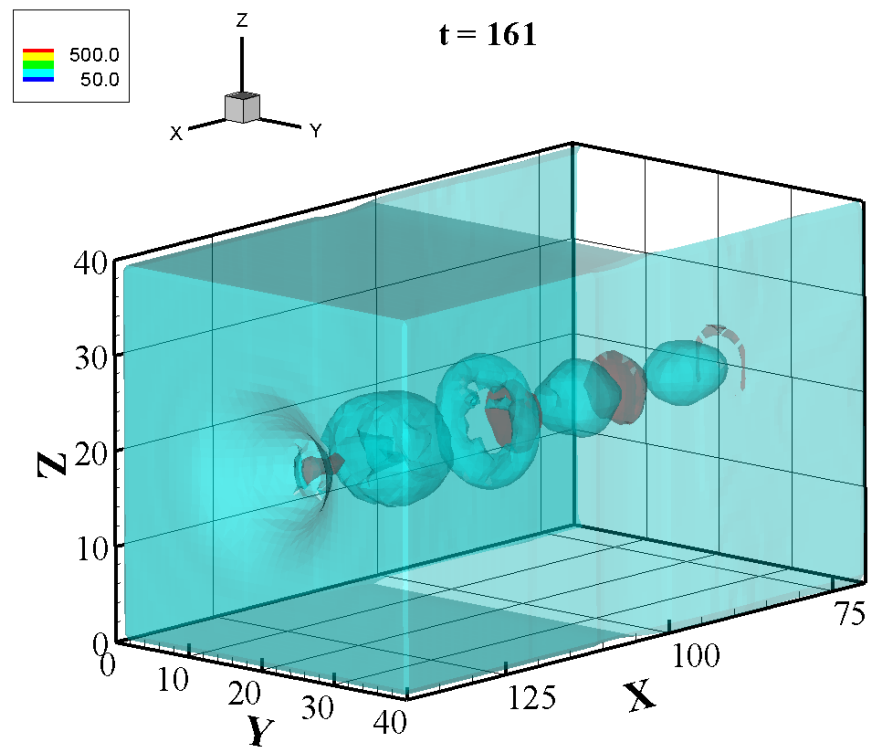
-Требование на ресурсы : не менее 50 Гб на сетку и до 50 Гб на частицы

Лазерное ускорение электронов

Кильватерная волна

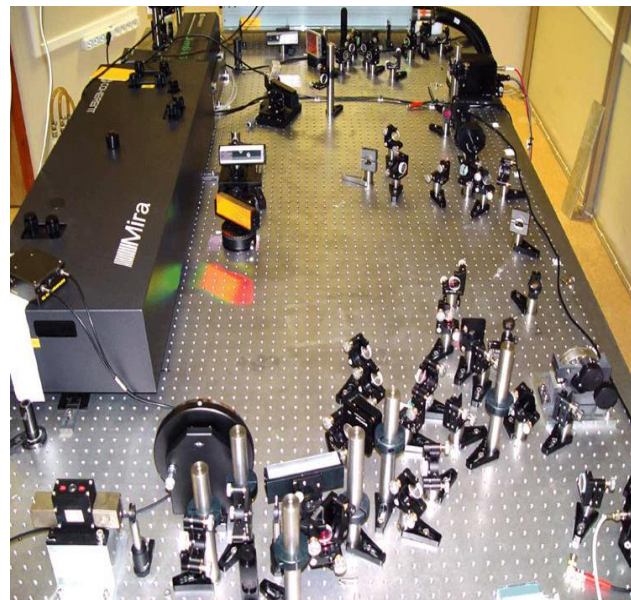
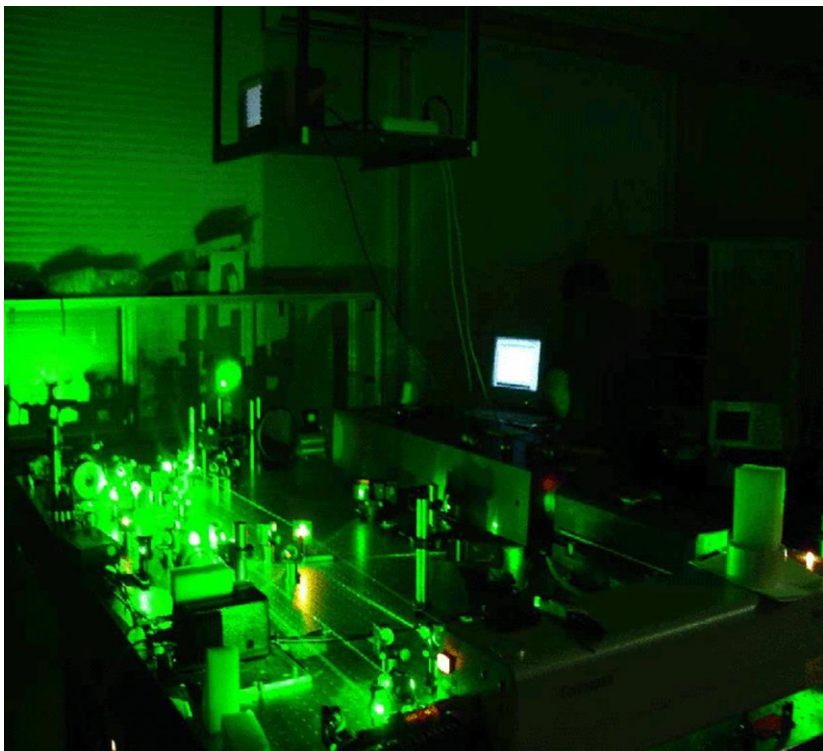


Фазовая плоскость электронов



Плотность электронов

Тераваттная фемтосекундная лазерная система на TiSa МЛЦ МГУ

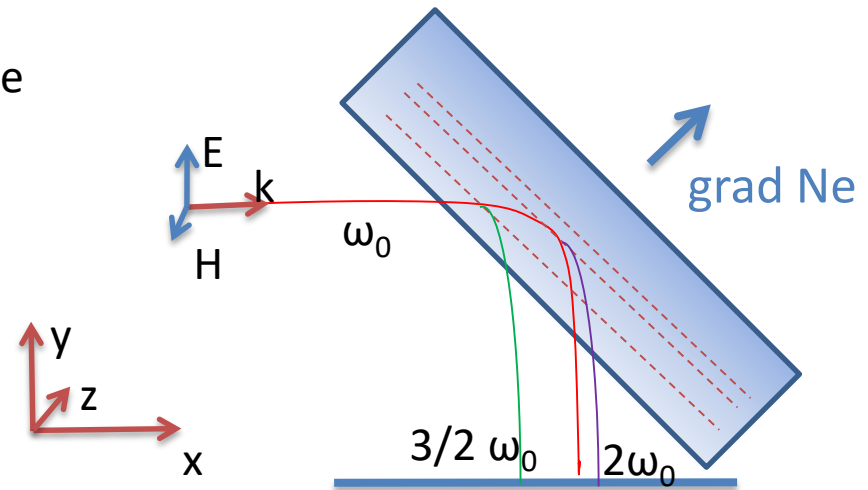
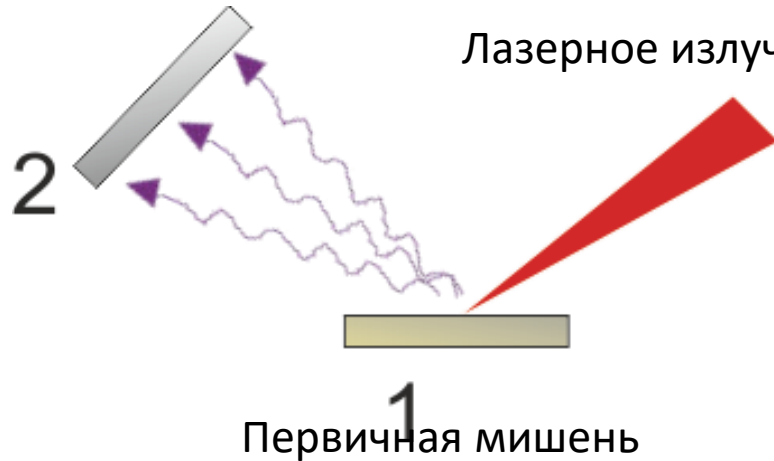


Параметры	Сейчас	Вскоре
Энергия	~50 мДж	100 мДж
ASE контраст	$>10^8$	$>10^{10}$
пс - контраст	$>10^6$	$>10^{10}$
Интенсивность	4×10^{18} Вт/см ²	$>10^{19}$ Вт/см ²

Генерация электронов и тормозного излучения в лазерно-плазменном взаимодействии

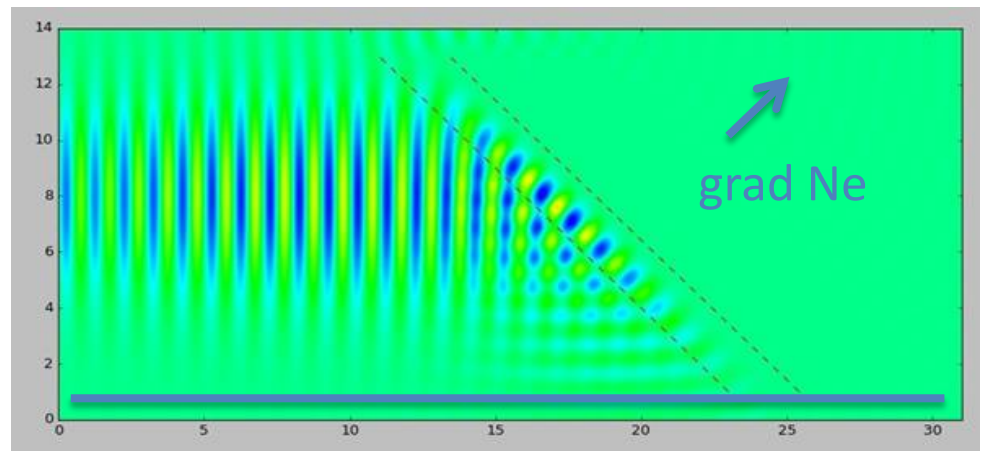
Вторичная мишень

Лазерное излучение



K. A. Ivanov, I. N. Tsymbalov, S. A. Shulyapov et al. // *Physics of Plasmas*. — 2017. — Vol. 24, no. 6. — P. 063109.

K. A. Ivanov, S. A. Shulyapov, P. A. Ksenofontov et al. // *Physics of Plasmas*. — 2014. — Vol. 21. — P. 093110–093110



Экспериментальная установка (твёрдая мишень)

Laser pulse parameters (Ti:Sapphire):

$\tau_{imp} = 50 \text{ fs}$; $\lambda = 800 \text{ nm}$; repetition rate = 10 Hz;
 $E_{imp} = 10\text{--}30 \text{ mJ}$; $M^2 = 1.4$; $I_{max} = 3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$;
ASE contrast $\sim 10^{-8}$; ns pre-pulse $\sim 5 \times 10^{-8}$ (-12.5 ns)

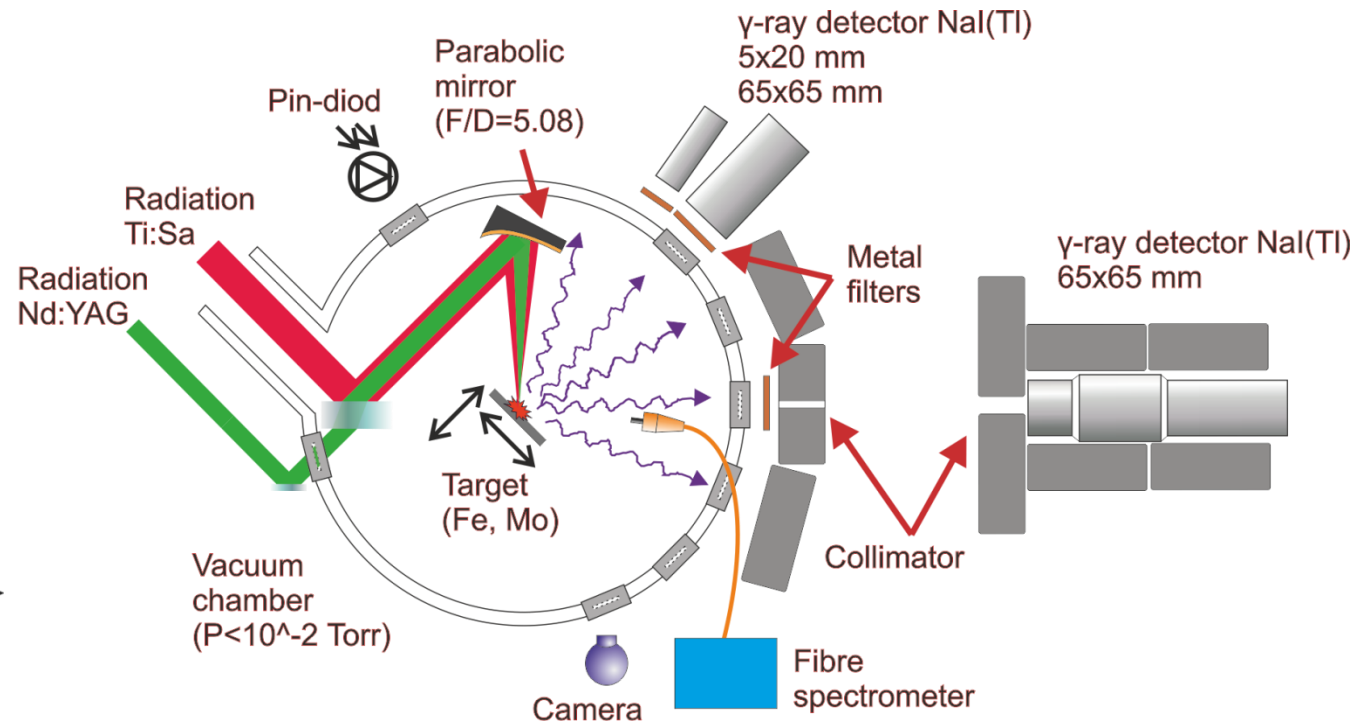
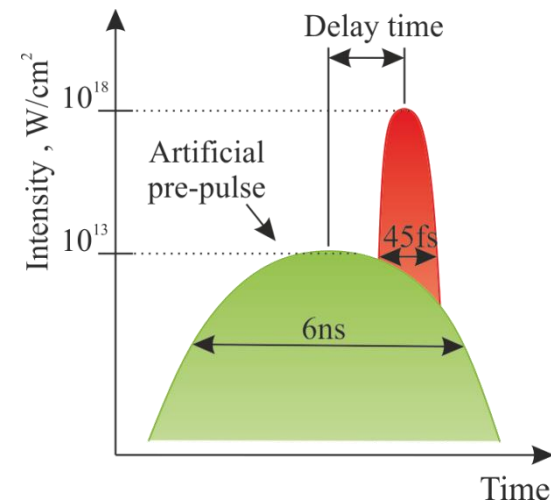
Laser pulse parameters (Nd:YAG):

$\tau_{imp} = 10 \text{ ns}$; $\lambda = 1064 \text{ nm}$;
(locked with Ti:Sa, accuracy $\sim 1 \text{ ns}$);
 $E_{imp} = 150 \text{ mJ}$; $I \sim 10^{11} \text{ W/cm}^2$.

The types of plasma diagnostics:

- **-ray** (integral level and spectrum measurements)
- **optical plasma emission** (spectrum measurements and emission directivity video recording)

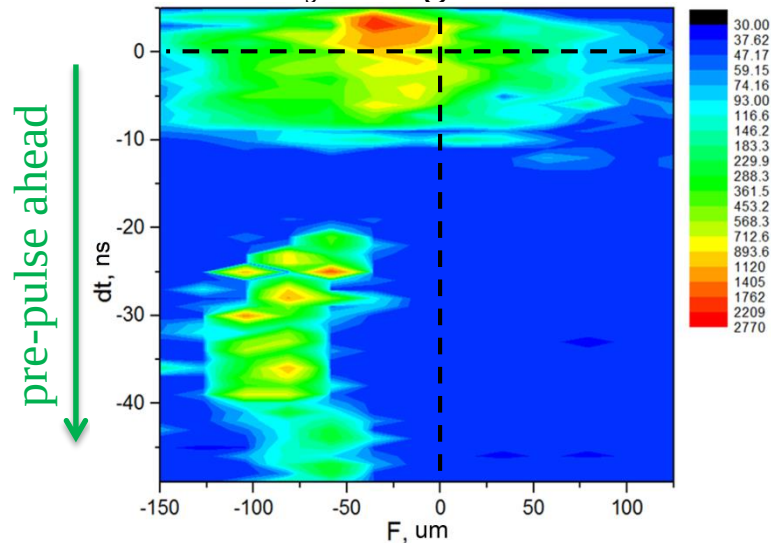
Idea:



Зависимость выхода рентгеновского излучения от задержек и положения фокуса

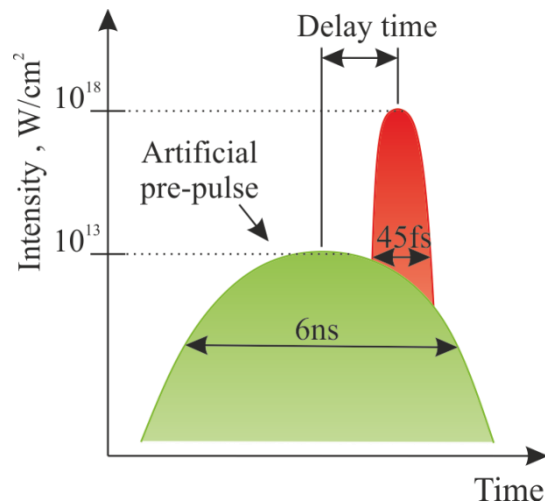
Integral measurements

□-ray energies: 0.2-10

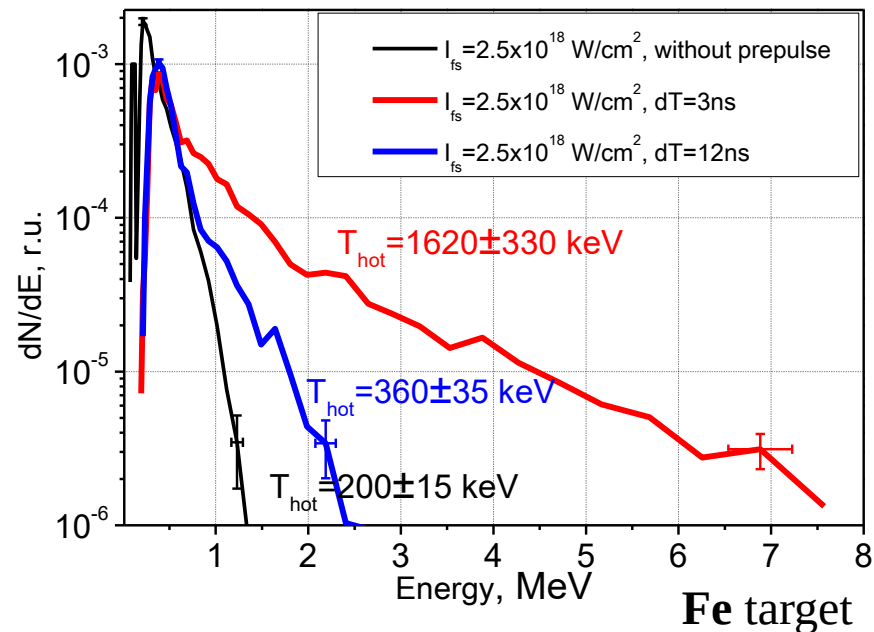


to target

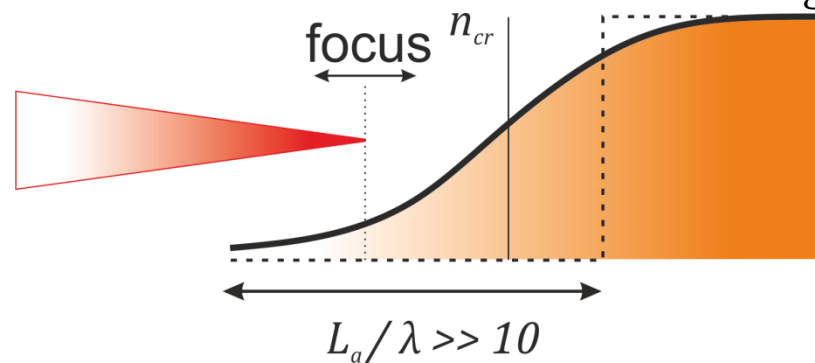
Mo target



Bremsstrahlung □-ray spectrum

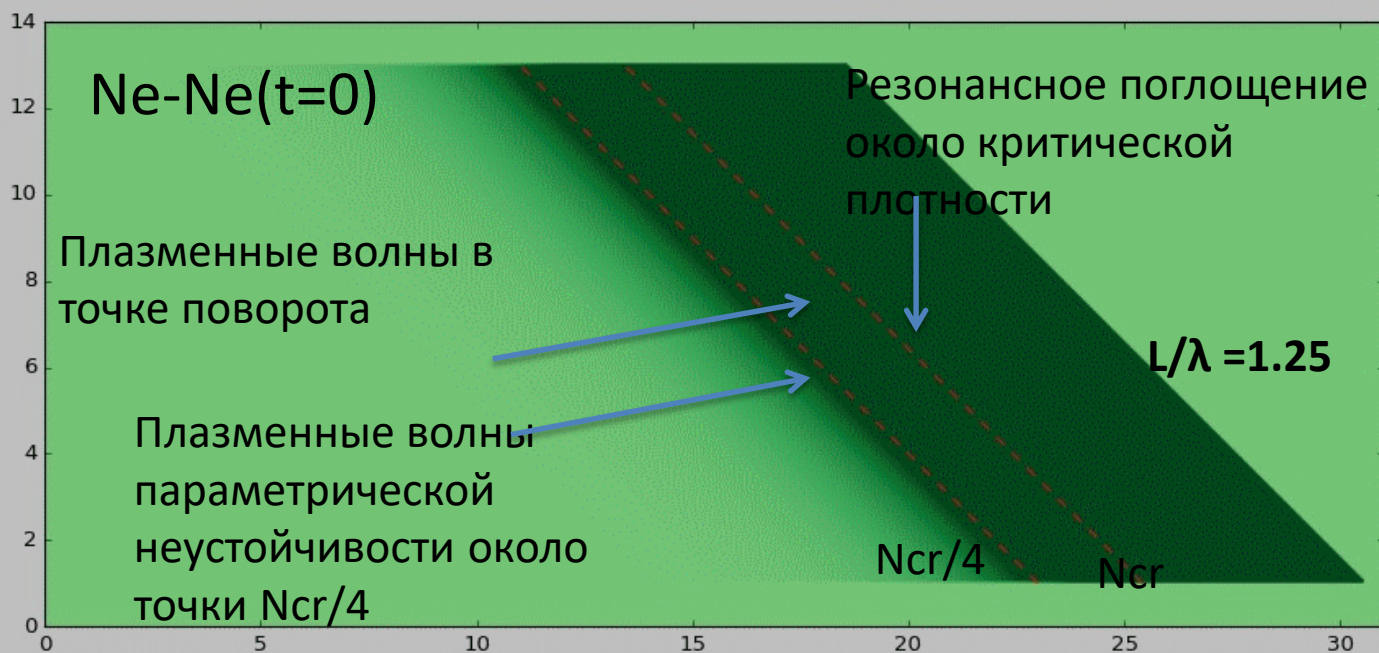
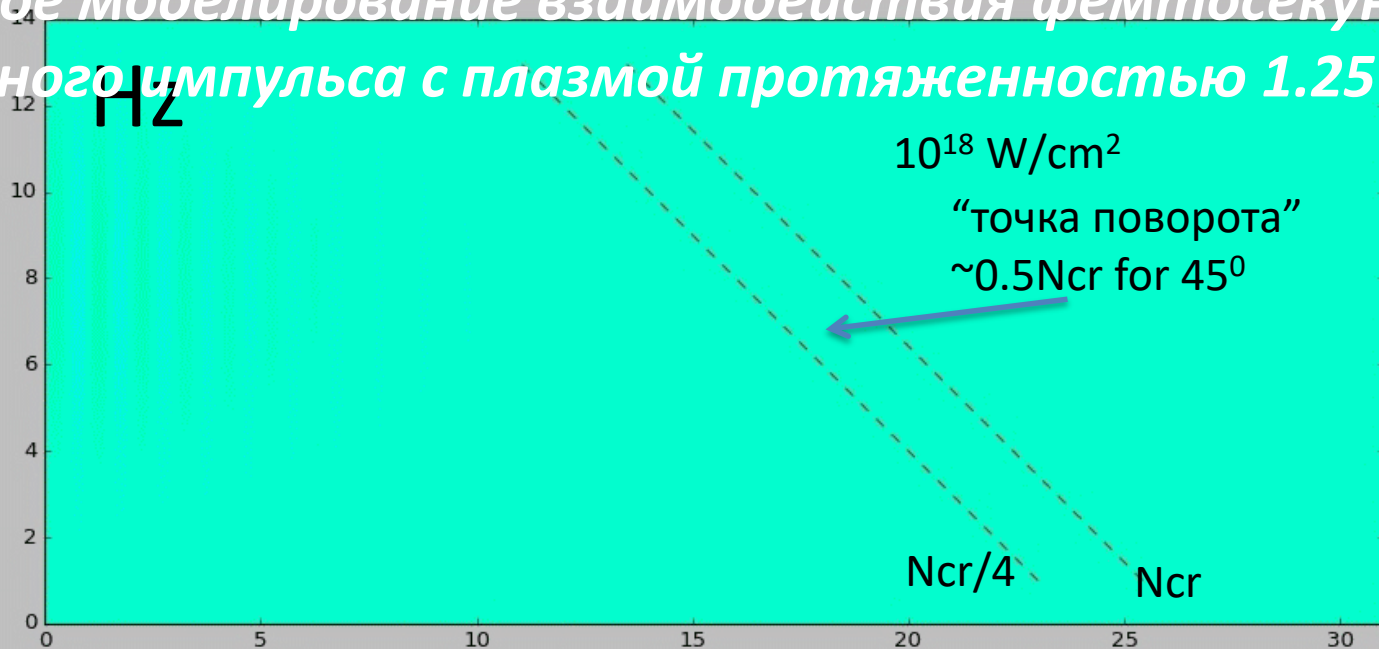


Fe target

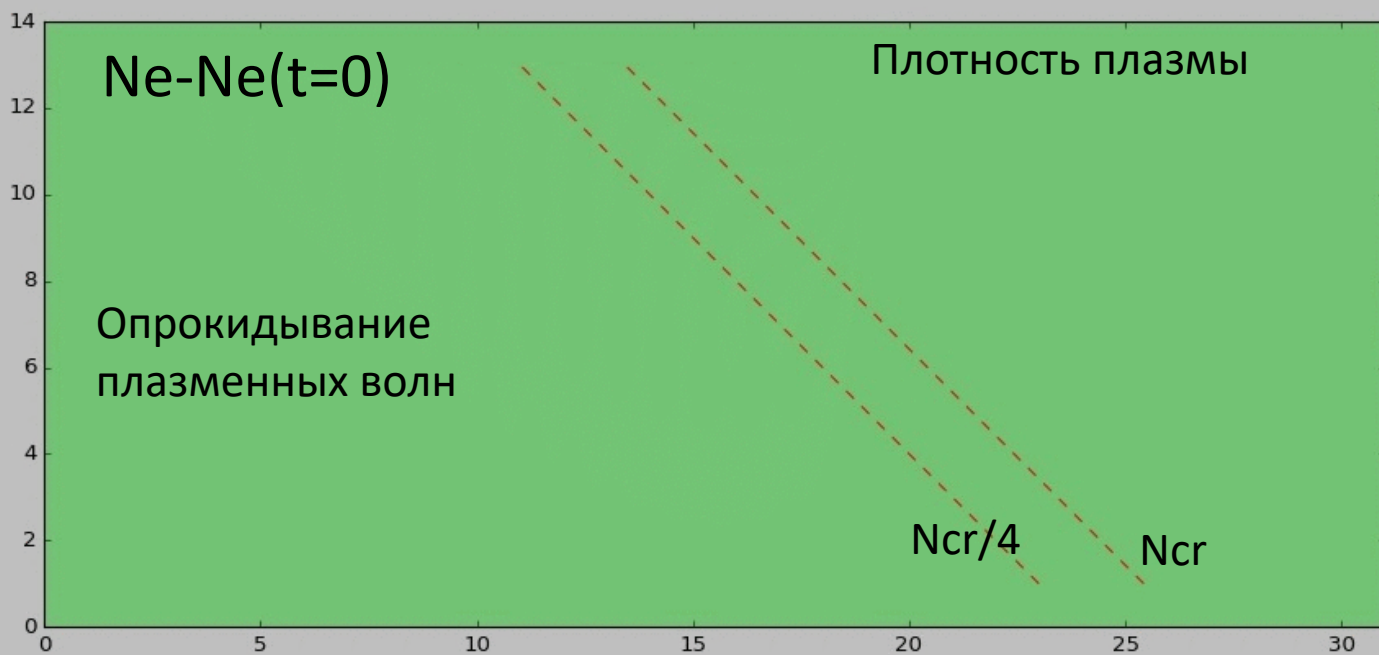
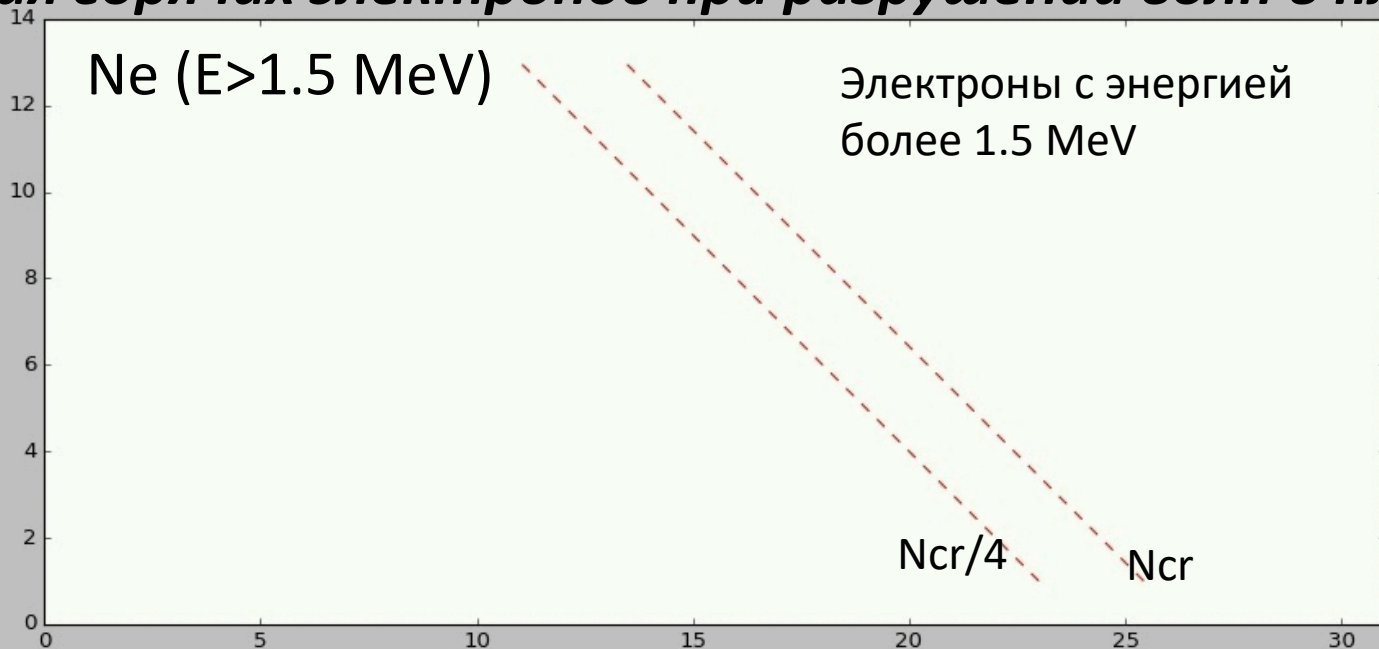


K. A. Ivanov, I. N. Tsymbalov, S. A. Shulyapov et al. // *Physics of Plasmas*. — 2017. — Vol. 24, no. 6. — P. 063109.

Численное моделирование взаимодействия фемтосекундного лазерного импульса с плазмой протяженностью $1.25 L/\lambda$



Генерация горячих электронов при разрушении волн в плазме



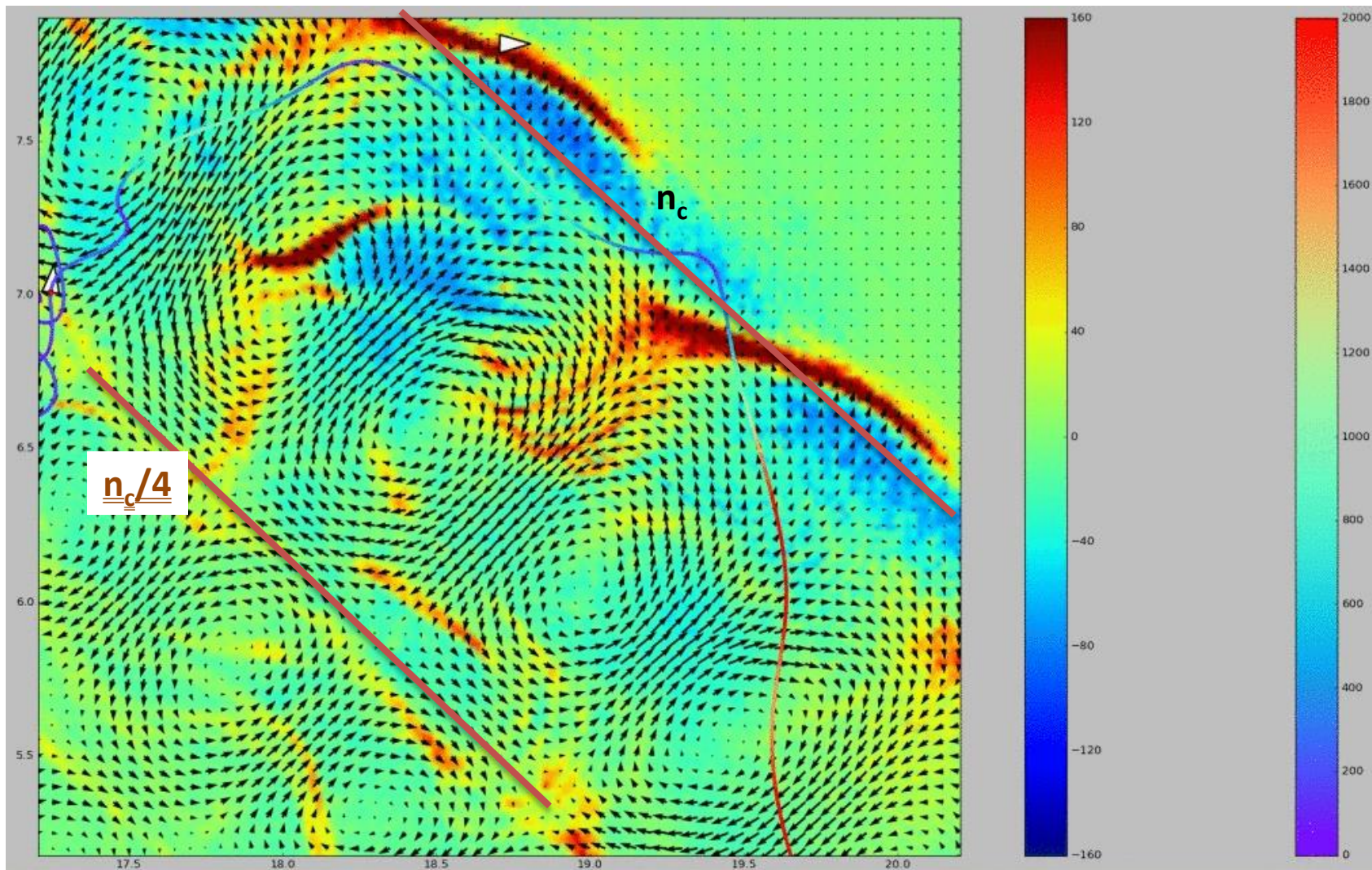
Траектории ускоряемых электронов(45°)

$I=10^{18}$ W/cm²
 $d=4$ mkm
 $\Theta=45^\circ$

$\lambda=1$ mkm
 $L/\lambda=1.25$

2D 31*14 mkm, $dx=dy=0.01$ mkm, $dt=0.003$ fs
 n_e , a.u.

E_e , keV



Траектории ускоряемых электронов(60°)

$$I=10^{18} \text{ W/cm}^2$$

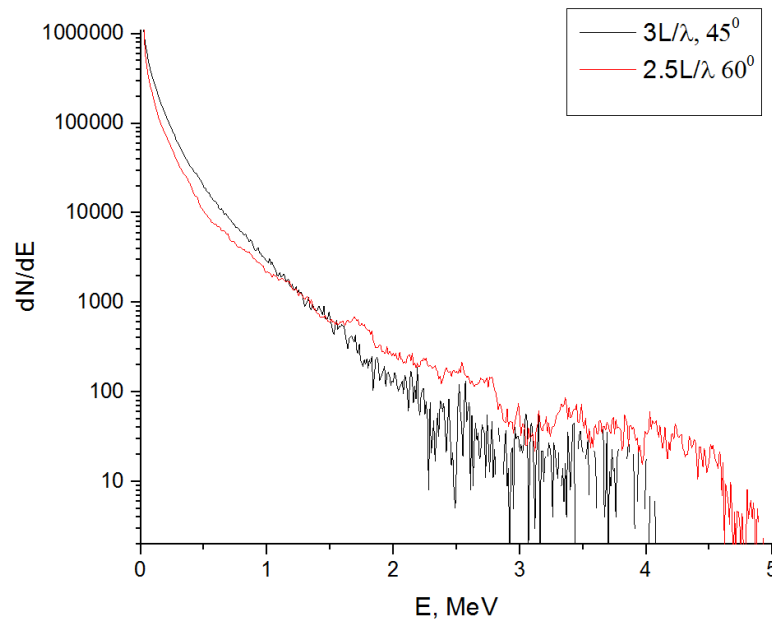
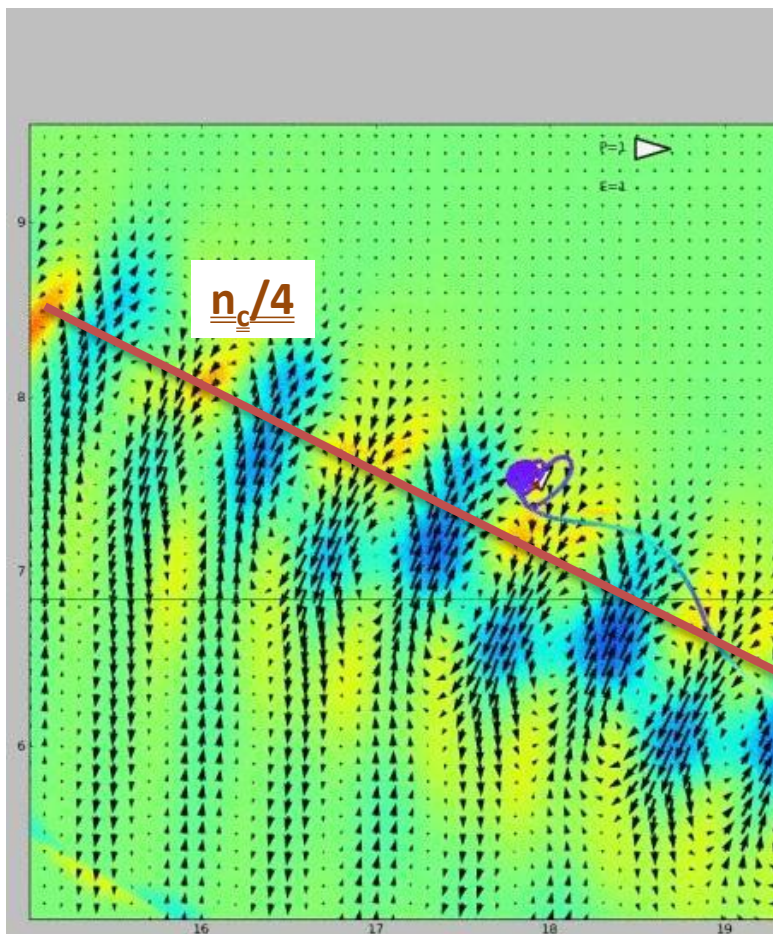
$$d=4 \text{ mkm}$$

$$\Theta=60^\circ$$

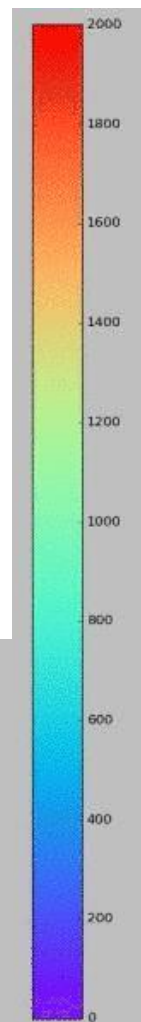
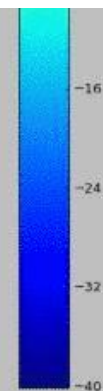
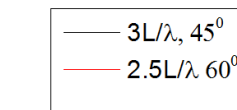
$$\lambda=1 \text{ mkm}$$

$$L/\lambda=2.5$$

$$2\text{D } 31 \times 14 \text{ mkm}, dx=dy=0.01 \text{ mkm}, dt=0.003 \text{ fs}$$

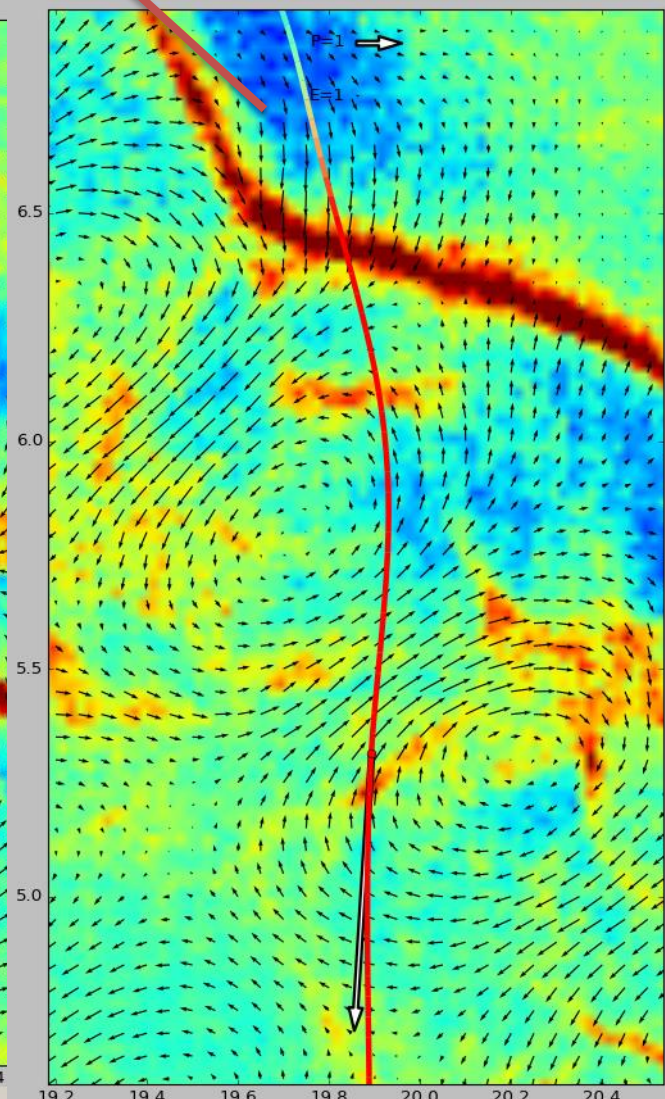
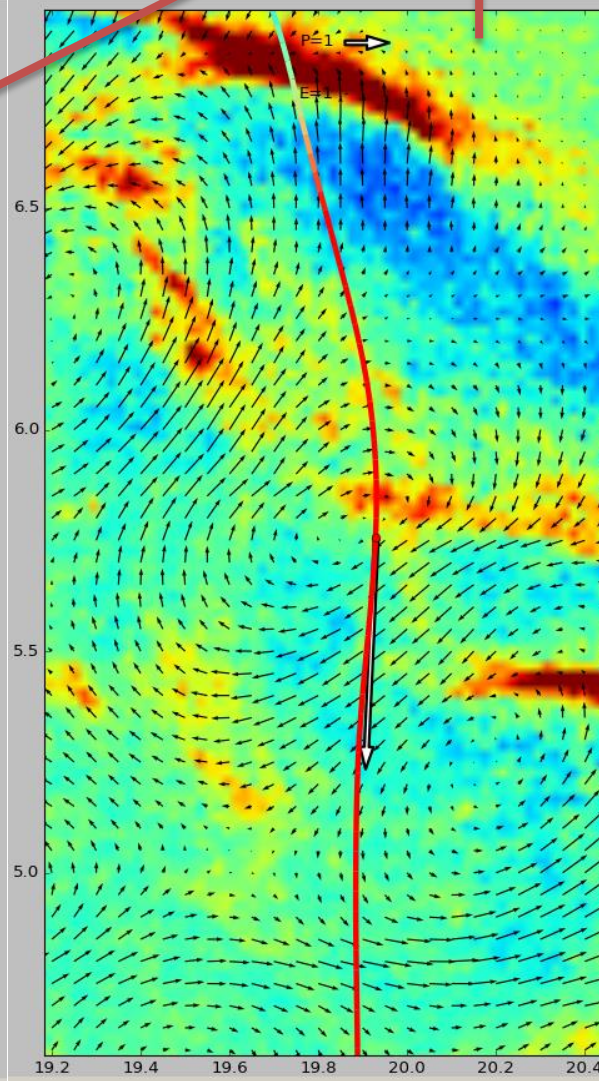
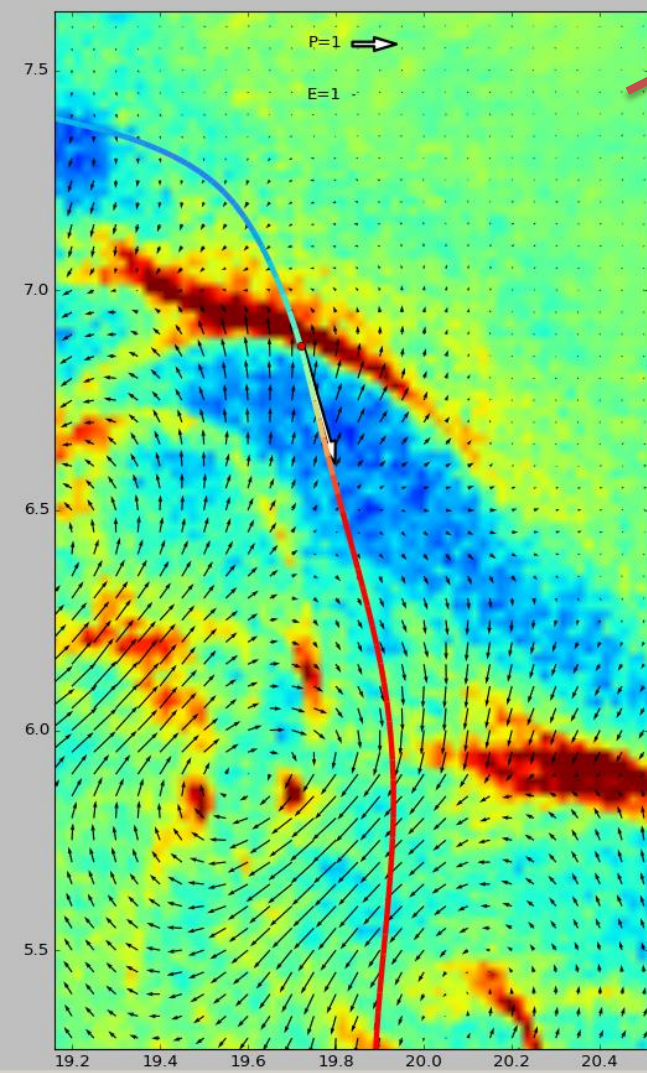
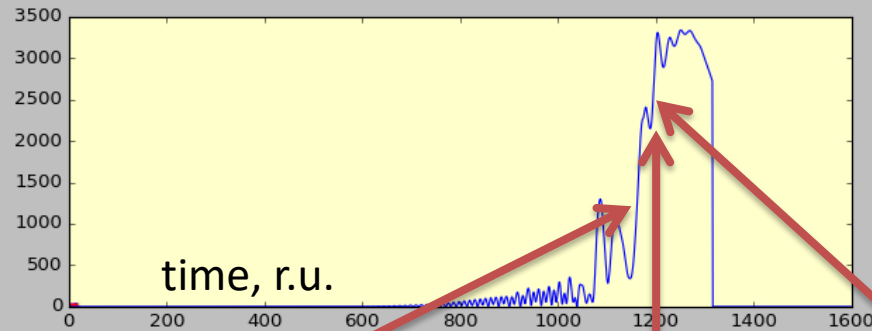


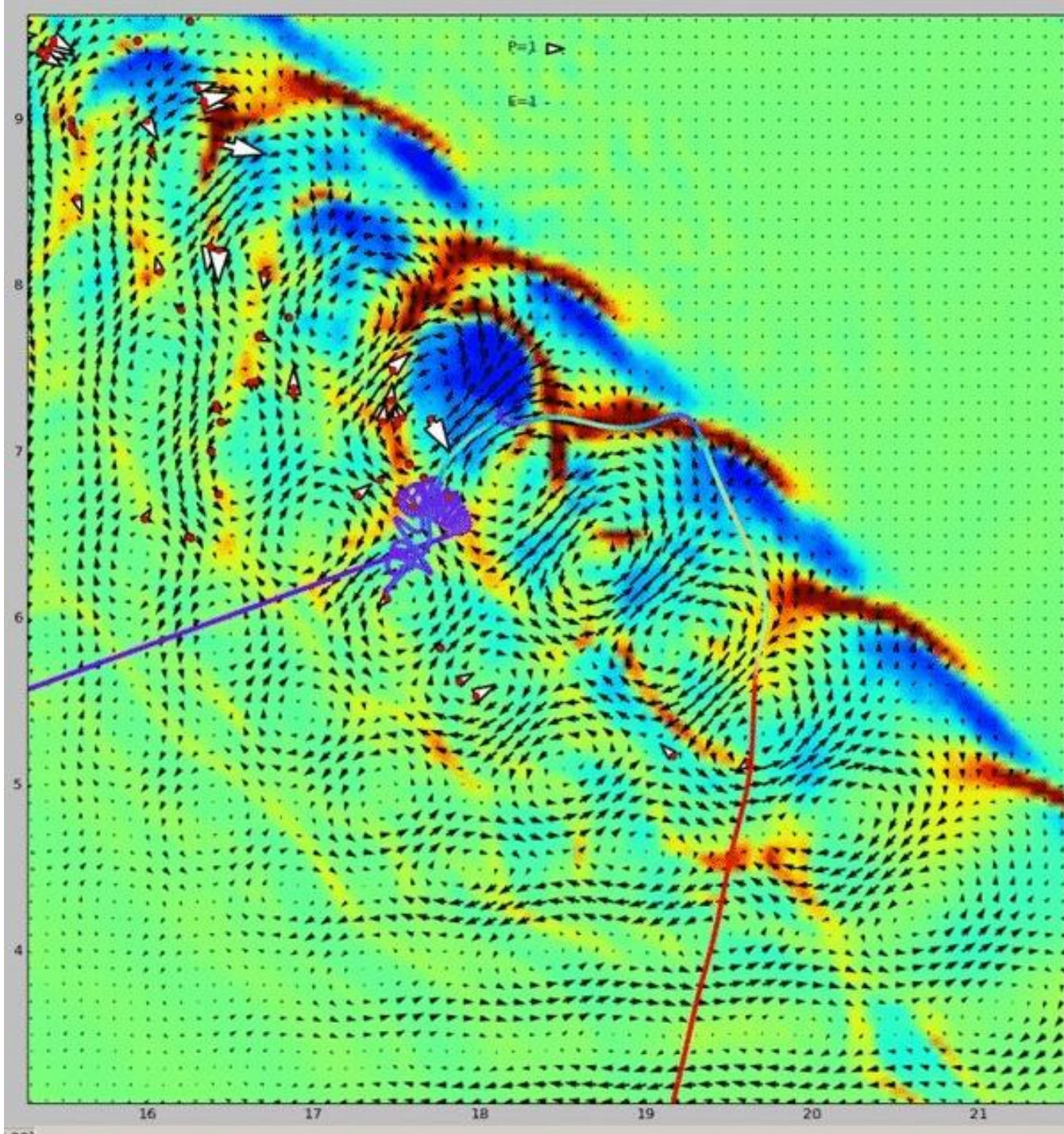
$E_e, \text{ keV}$

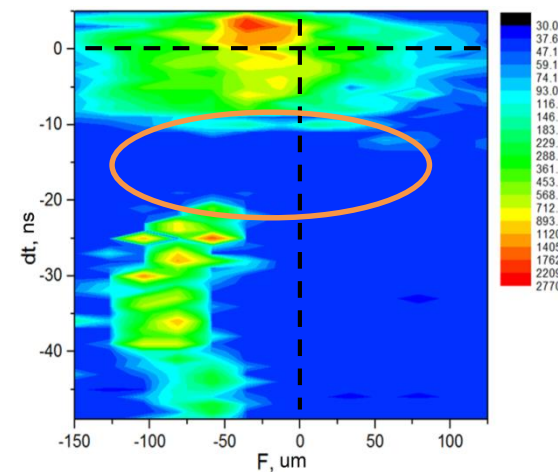
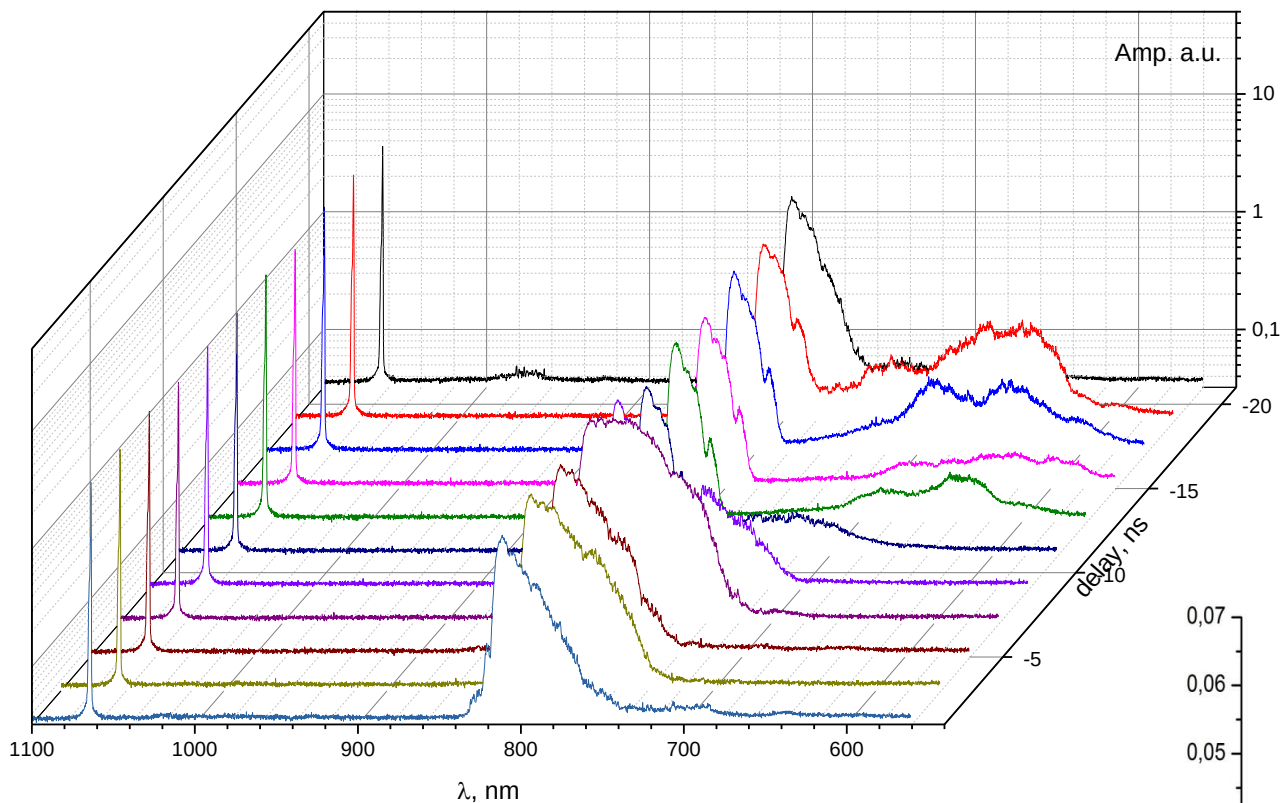


E, keV

time, r.u.

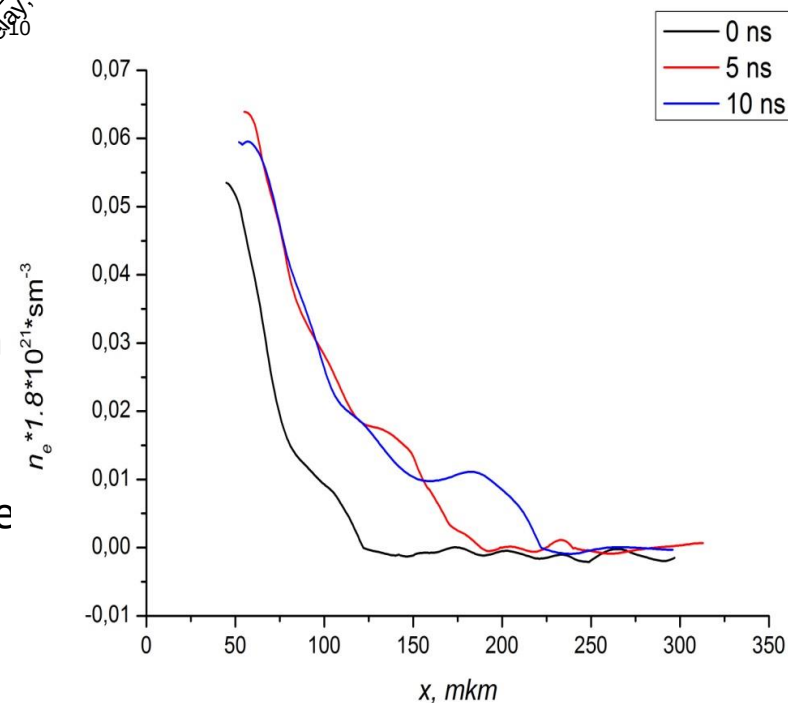




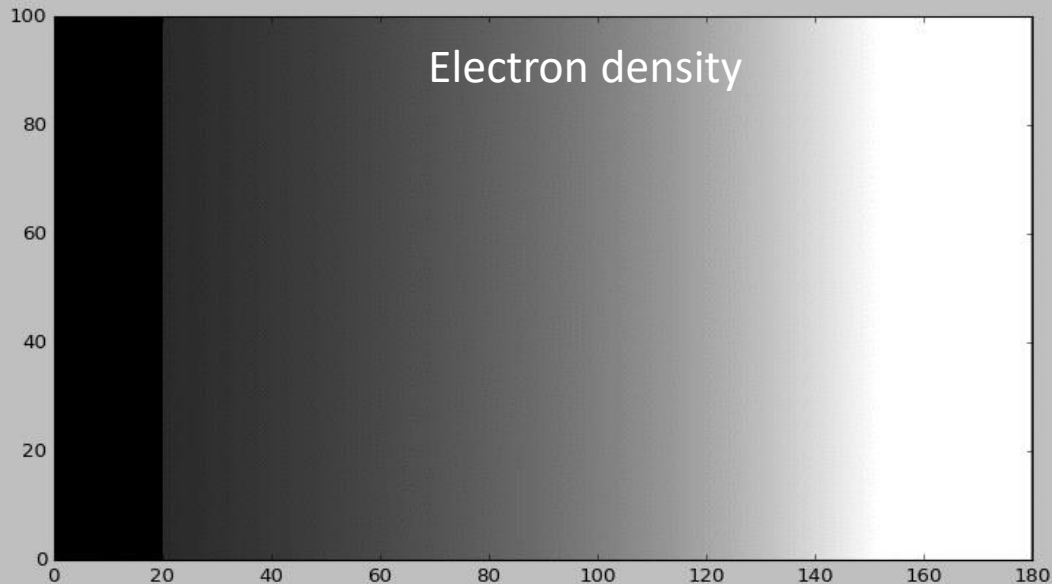
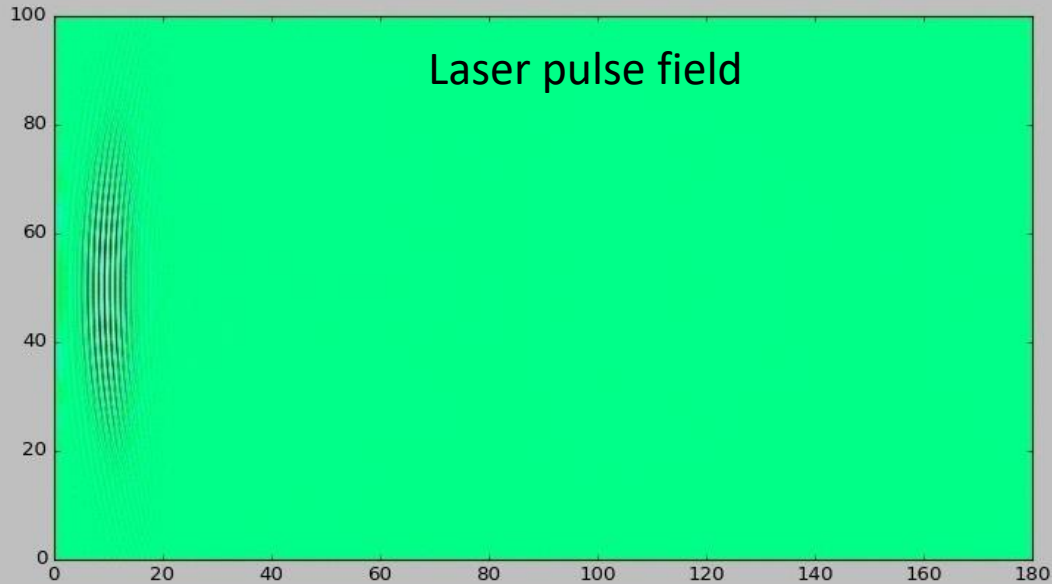


the presence of a blue shift indicates on the ionization processes

- laser pulse frequency shifting
- ionization defocusing leads to decreasing of the pulse intensity and gamma yield



Моделирование вклада ионизации в дефокусировку



$$E_{tt} = \frac{c^2}{n^2} (E_{xx} + E_{yy})$$

$$n = \sqrt{1 - \frac{N_e}{N_{cr}}}$$

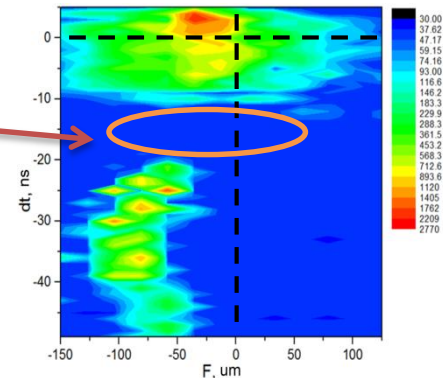
$$\frac{dN_i}{dt} = W_i N_{i-1} - W_{i+1} N_i$$

$$N_e = \sum i N_i$$

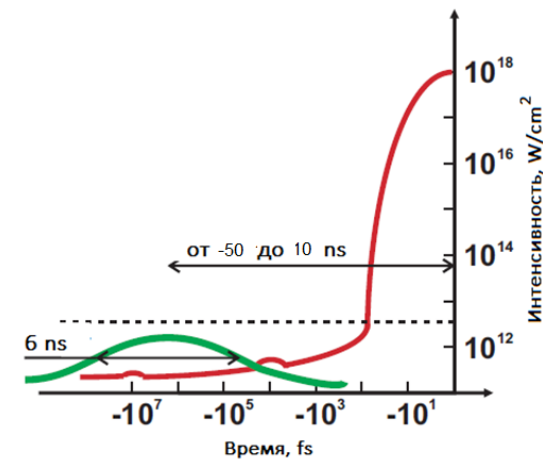
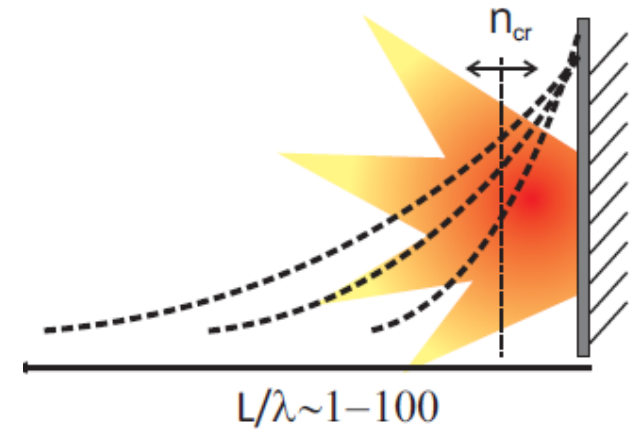
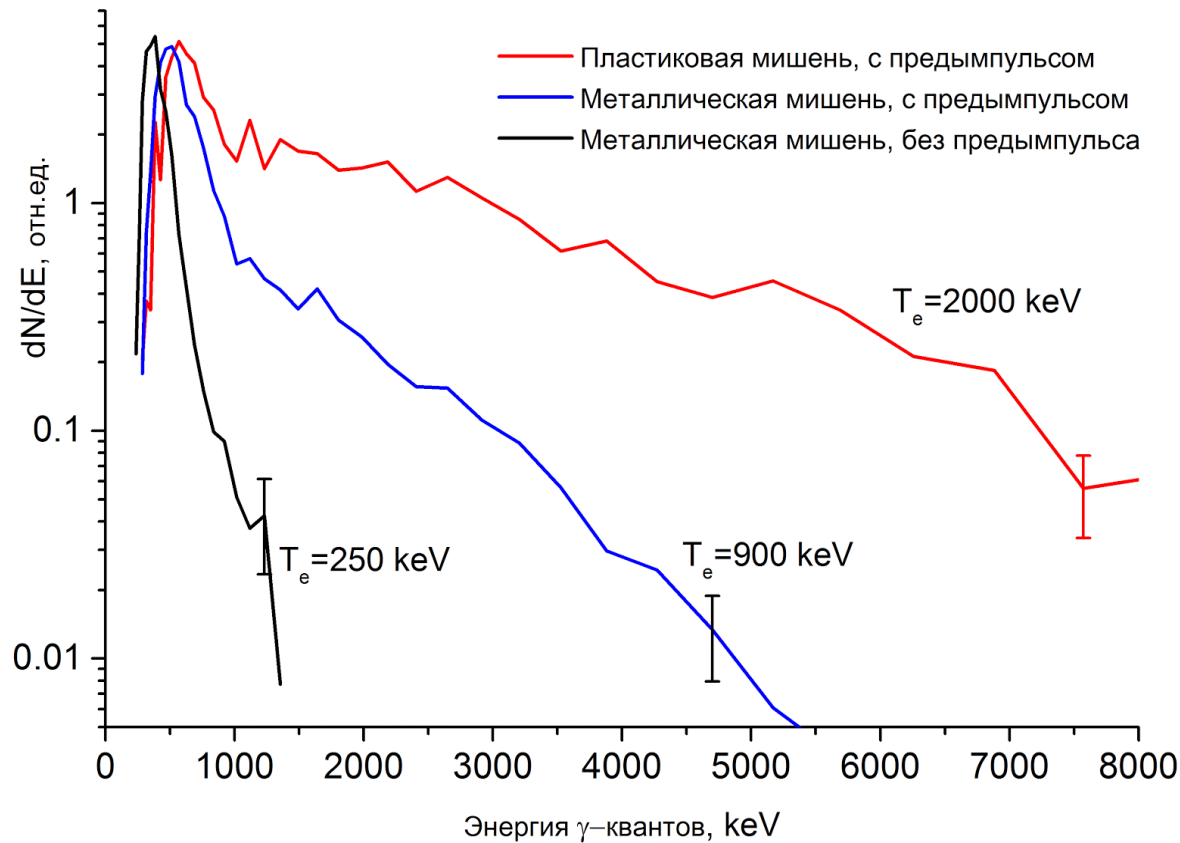
$$W(E) = 4\omega_a r_H^{2.5} \frac{E_a}{|E(t)|} e^{-2r_H^{1.5} E_a / (3|E(t)|)}$$

Vacuum intensity = 10^{18}

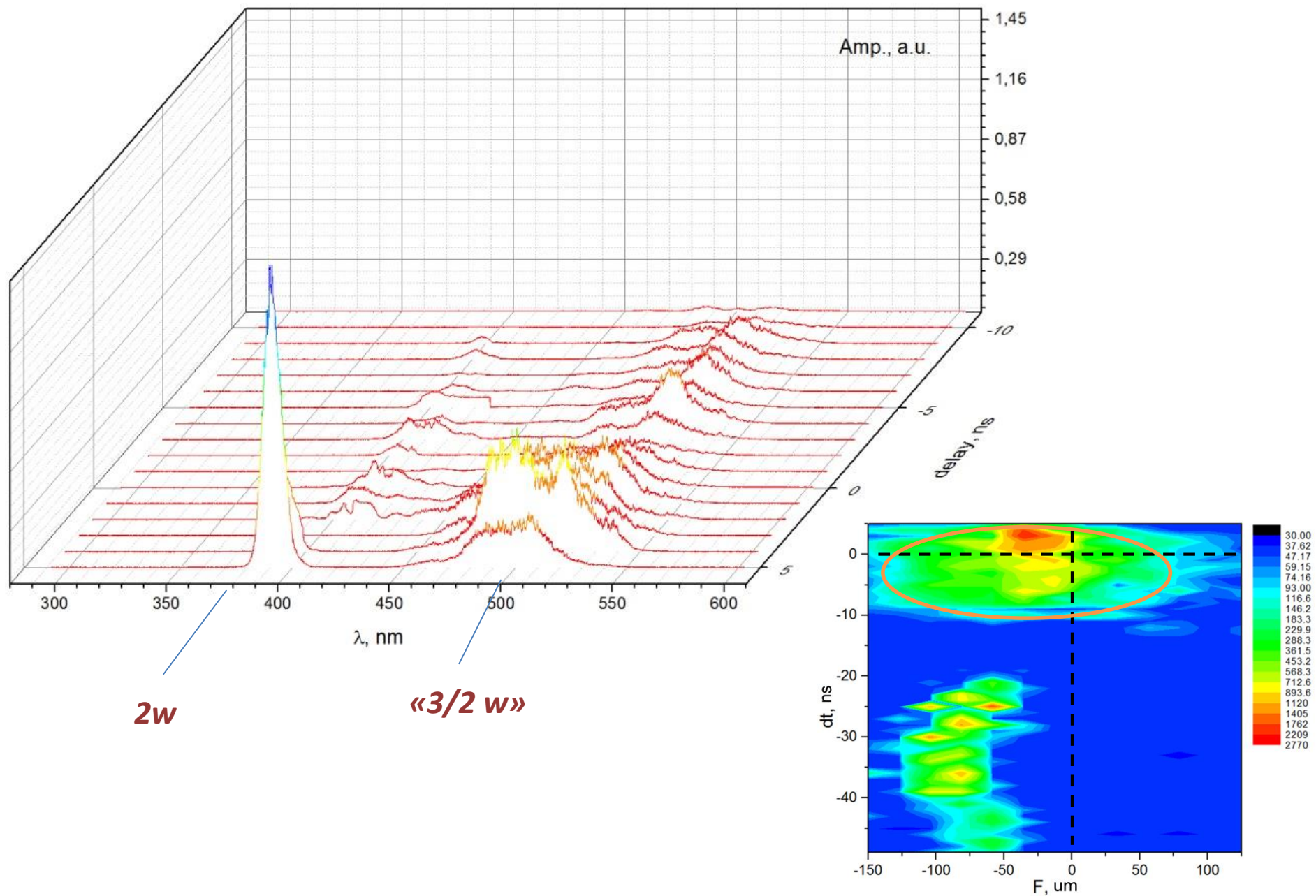
$I < 10^{17}$
W/cm²

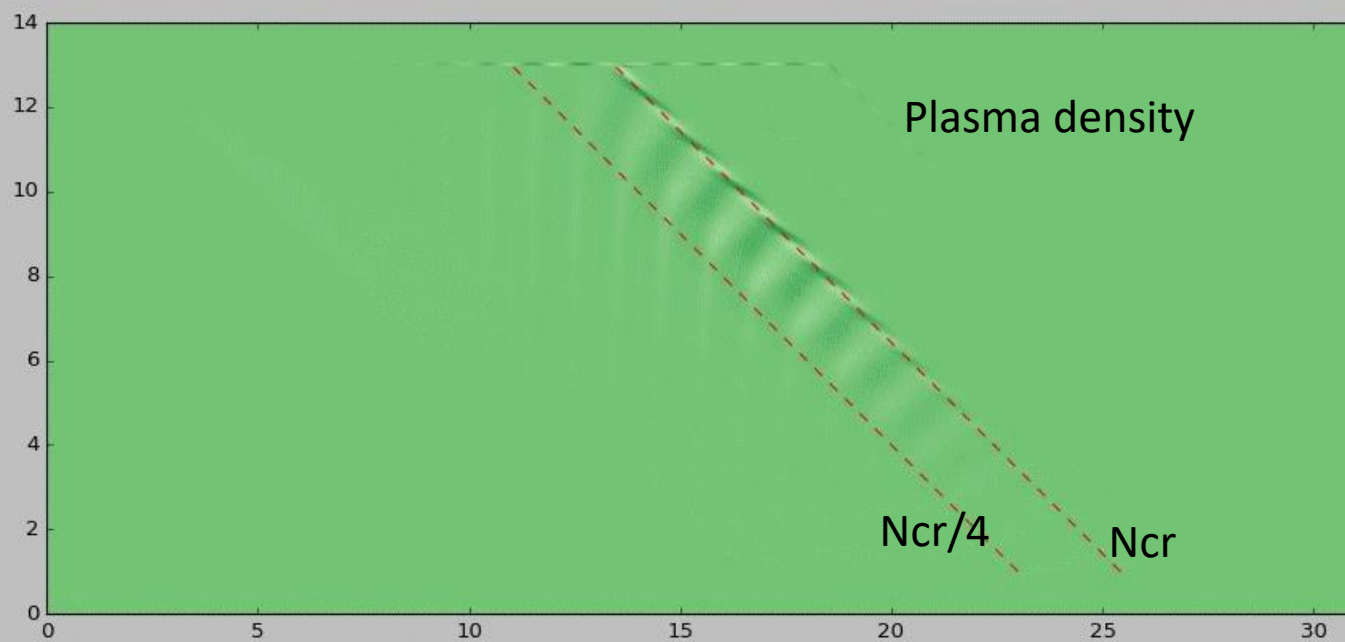
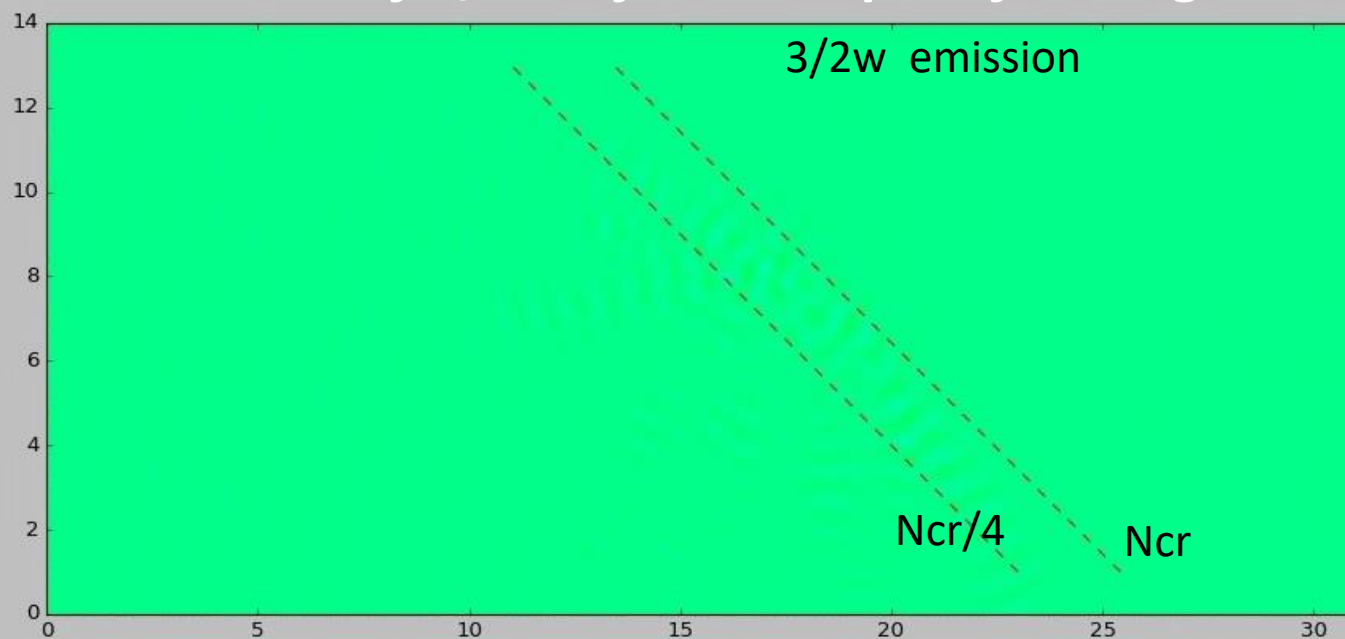


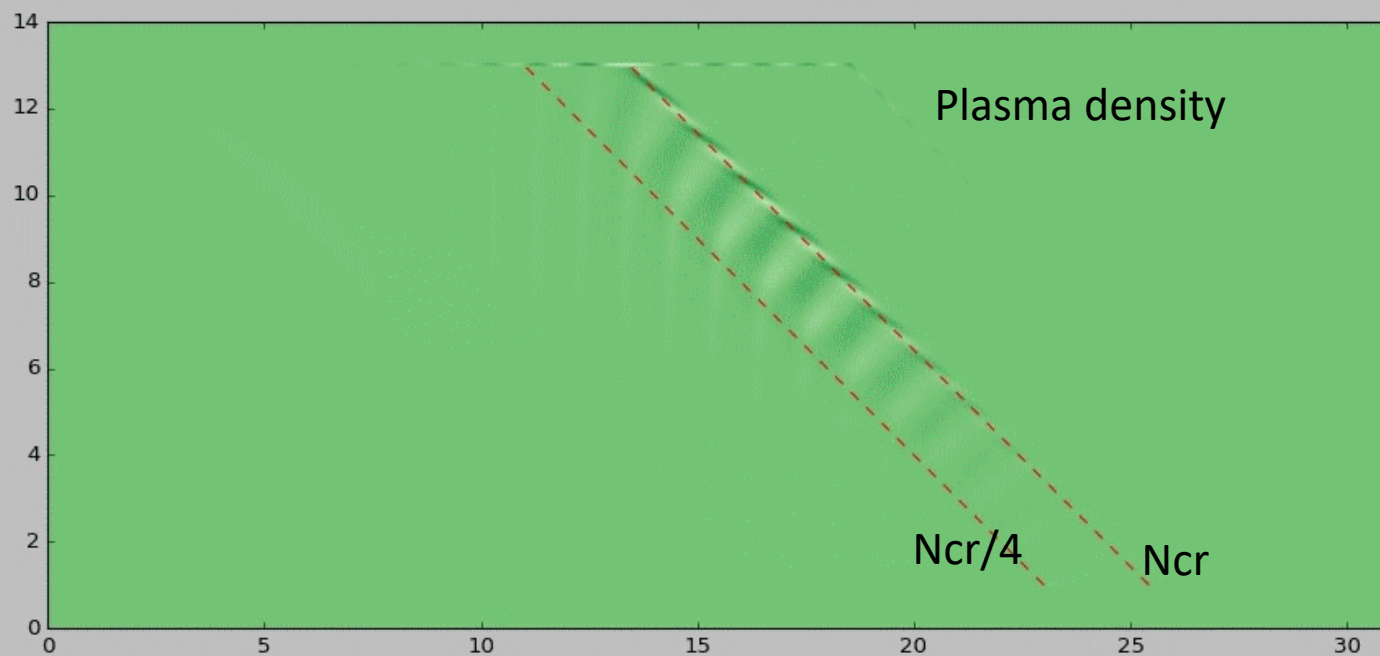
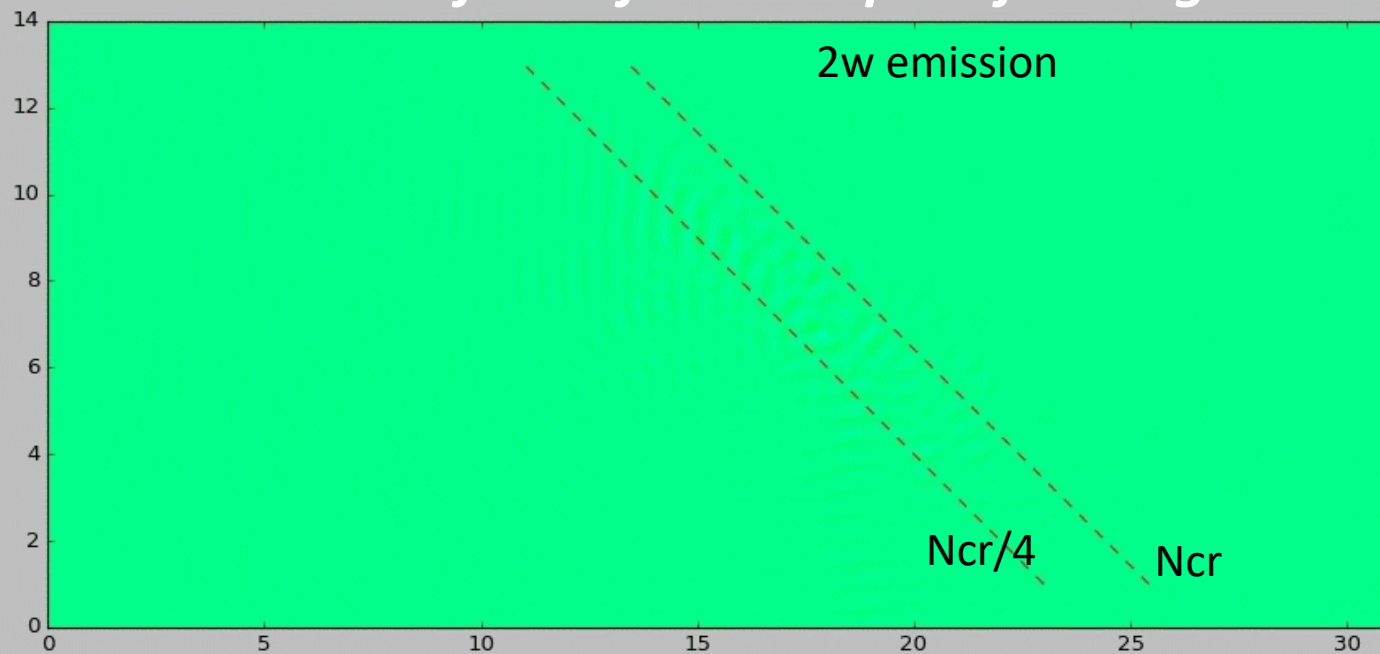
Результаты эксперимента с предымпульсом



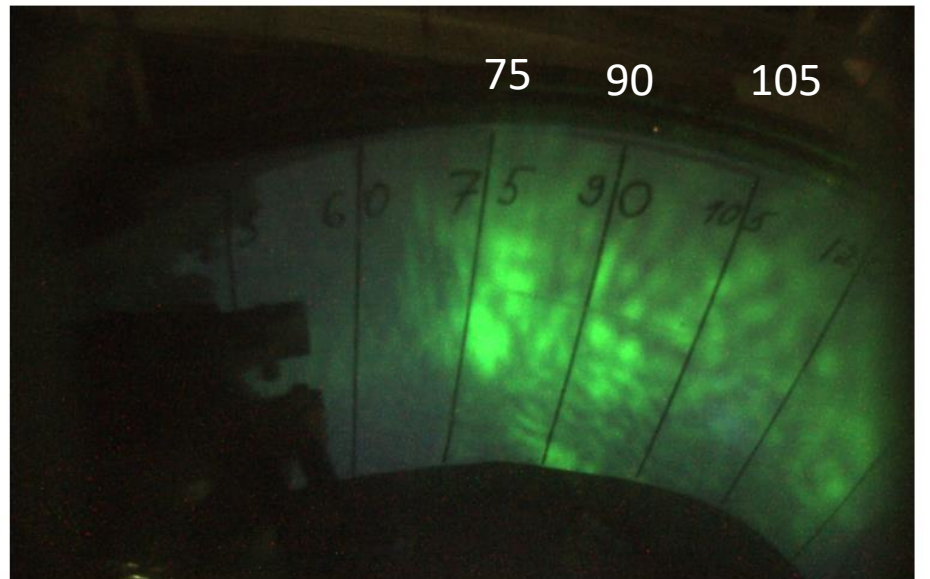
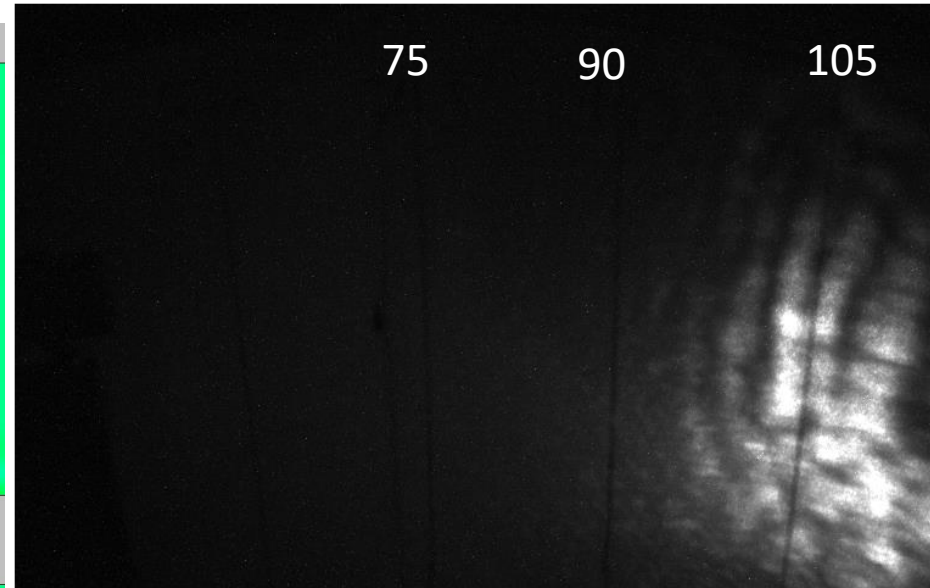
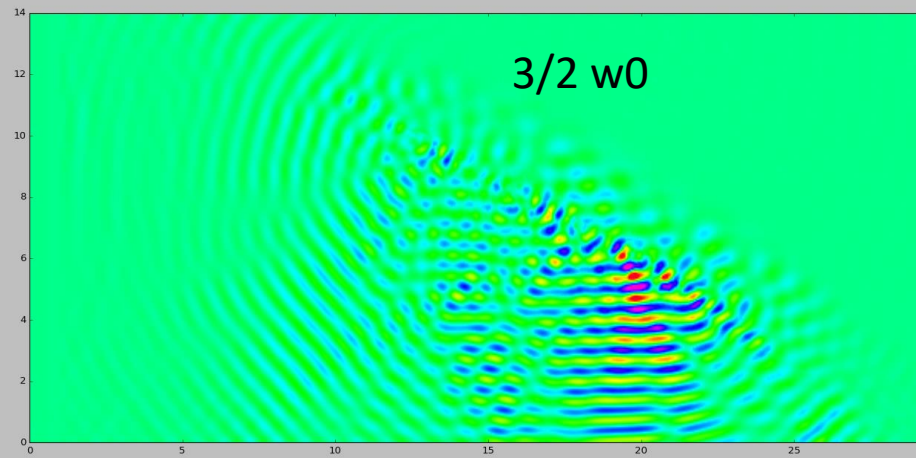
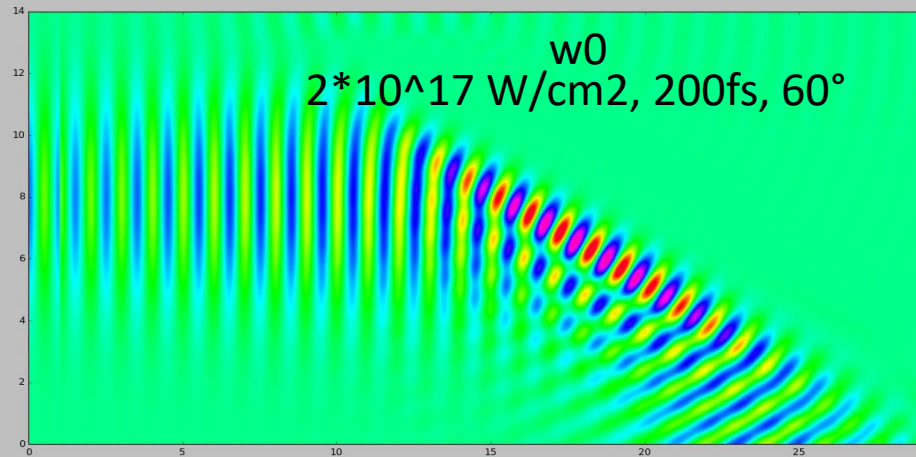
Оптическая диагностика плазмы







3/2w generation



Параметры моделирования

3D3V PIC code Mandor

<http://mandor.ilc.edu.ru/mandor3>

Target:

Time step – 0.003fs

Spatial step – $\Delta x/100 = 0.01 \Delta x$ m

Interaction region – $31 \times 14 \Delta x$ m

Laser beam:

Wave length (λ) – 1 Δx m

Pulse duration (FWHM) – 50fs

(Total) – 200fs

Diameter in focus (D_f) – 4 Δx m

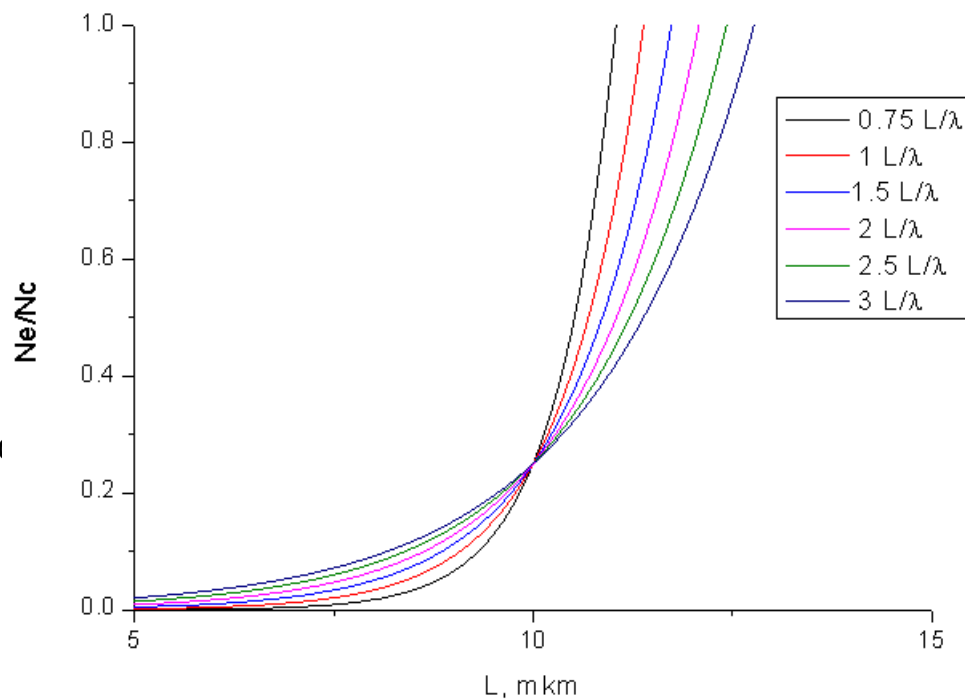
Intensity (I) – 10^{17} - 10^{18} W/cm²

Polarization – p

Particles in cells ~ 10

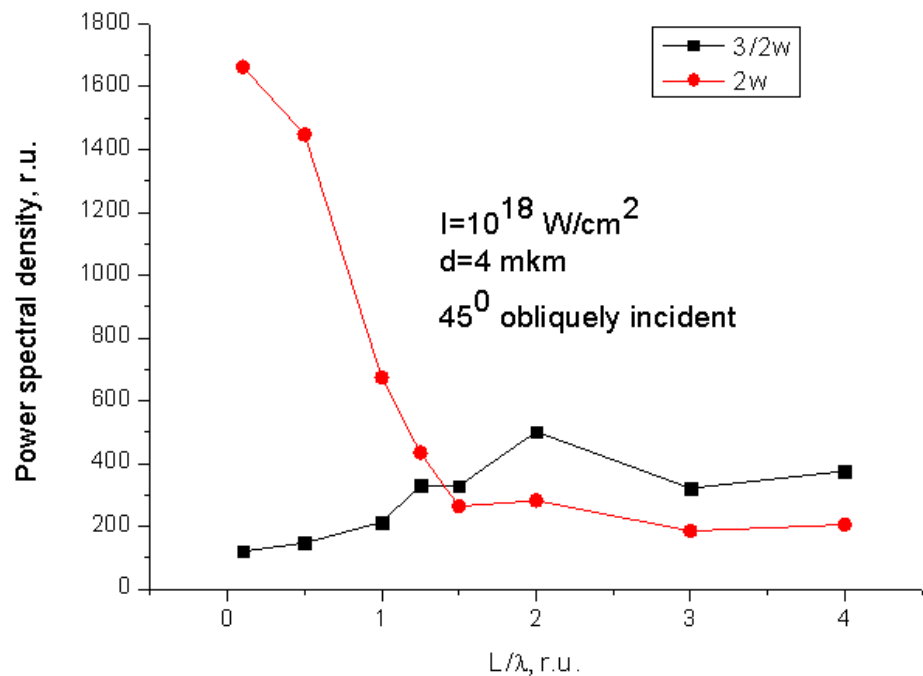
All particles $> 10^7$

Calculated on “Lomonosov” cluster



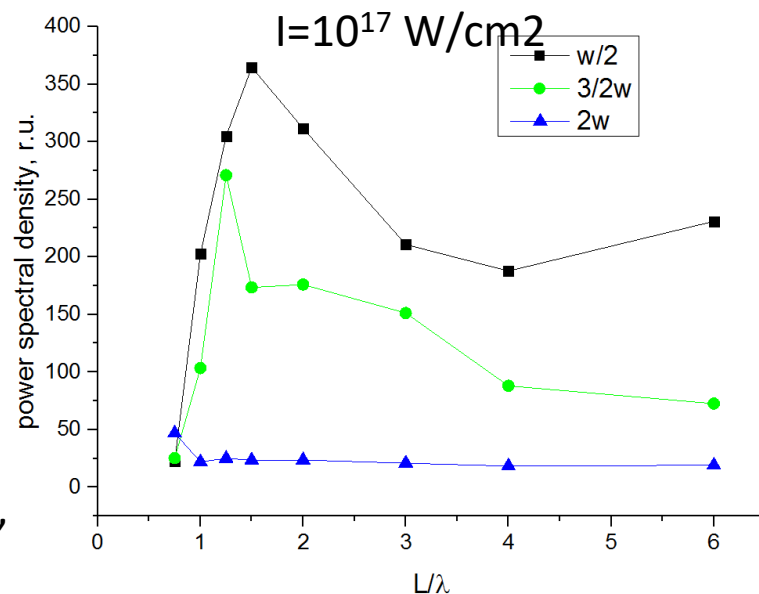
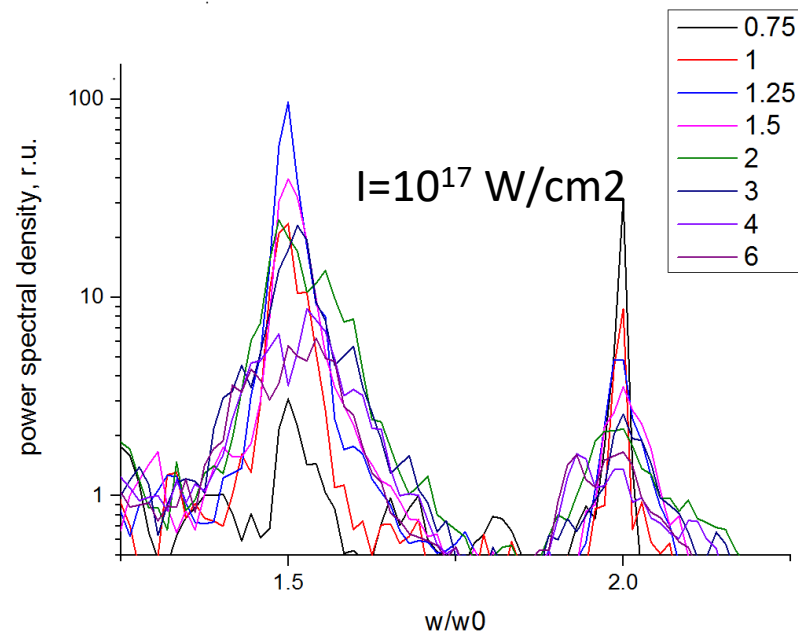
Моделирование генерации гармоник

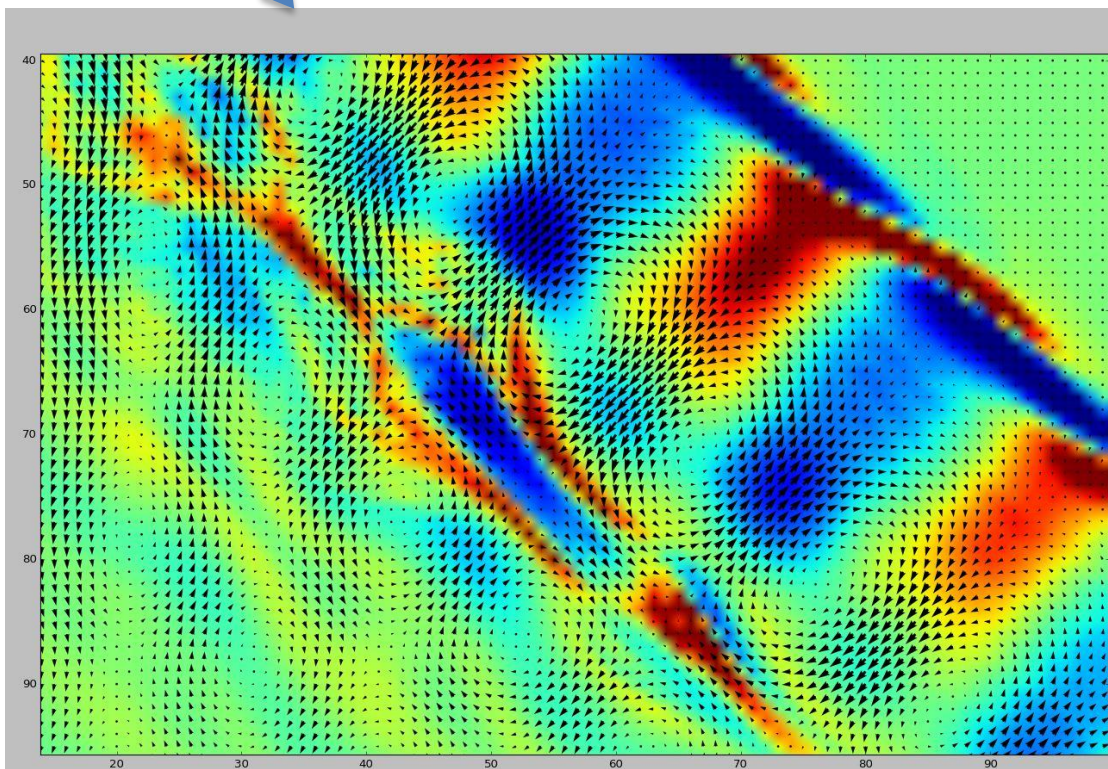
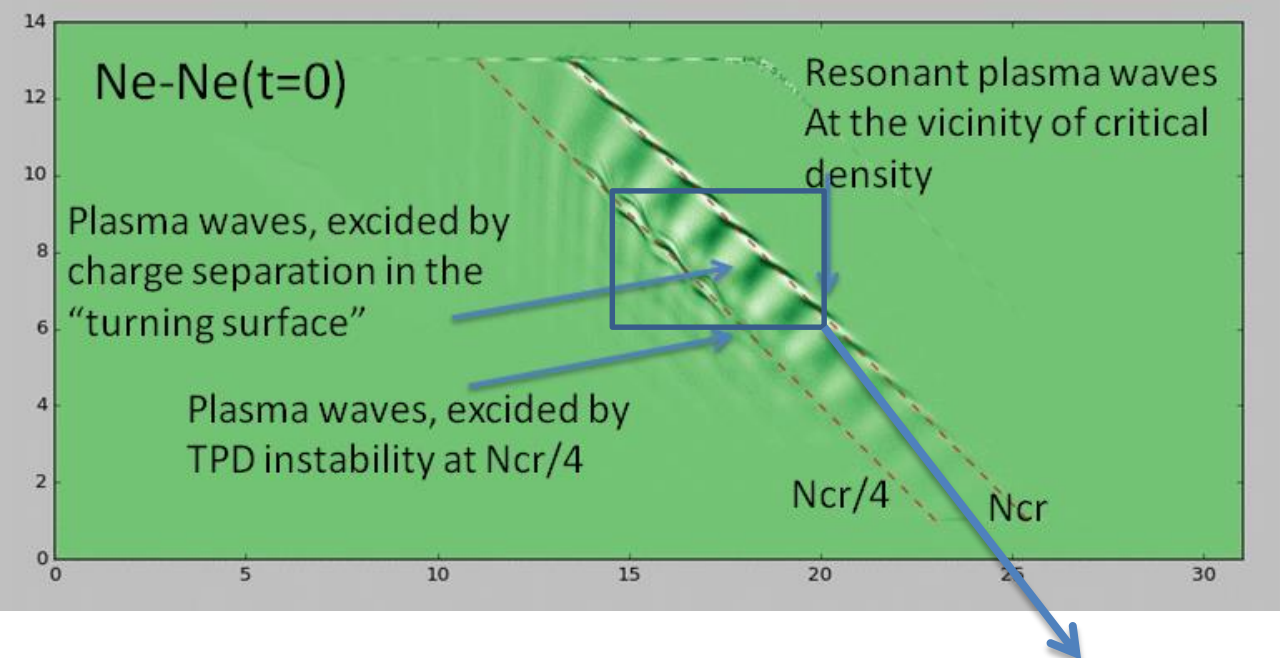
Initial profile $n_e = n_0 e^{\xi/L}$



Presence of both harmonic ($2w$ and $3/2w$) in experiment means, that $L/\lambda \sim 1-2$

K. A. Ivanov, I. N. Tsymbalov, S. A. Shulyapov et al. // *Physics of Plasmas*. — 2017. — Vol. 24, no. 6. — P. 063109.



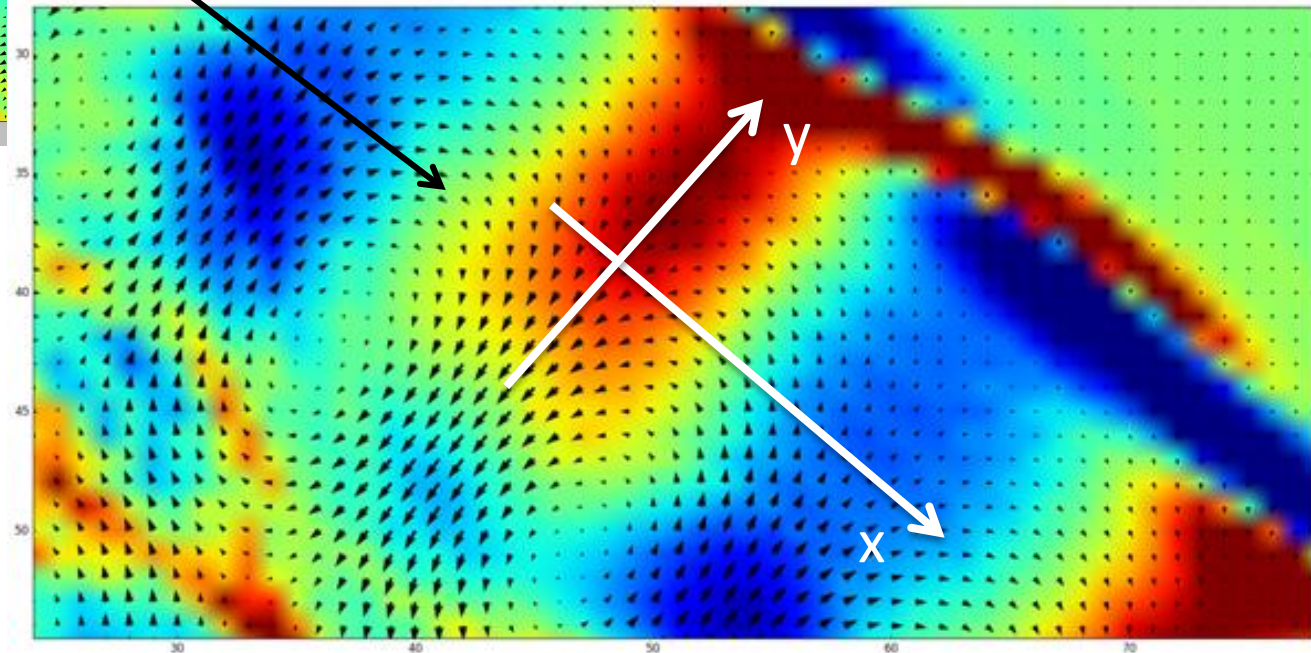
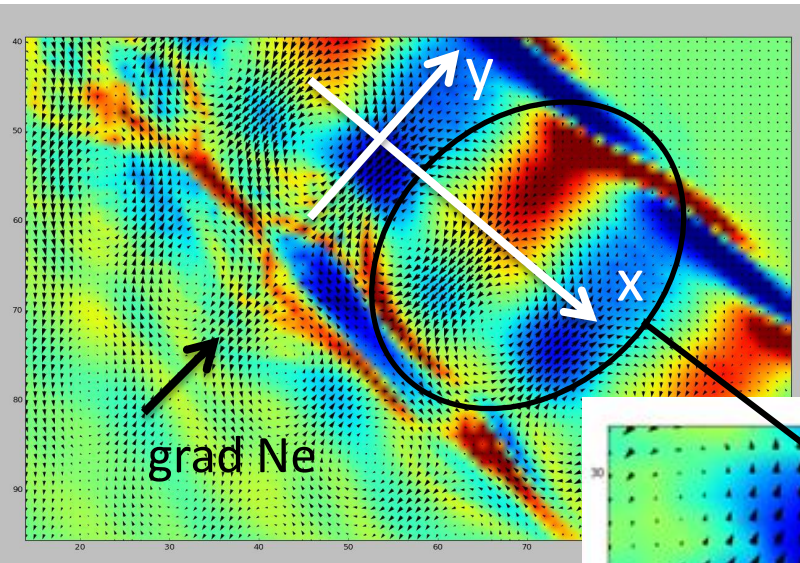
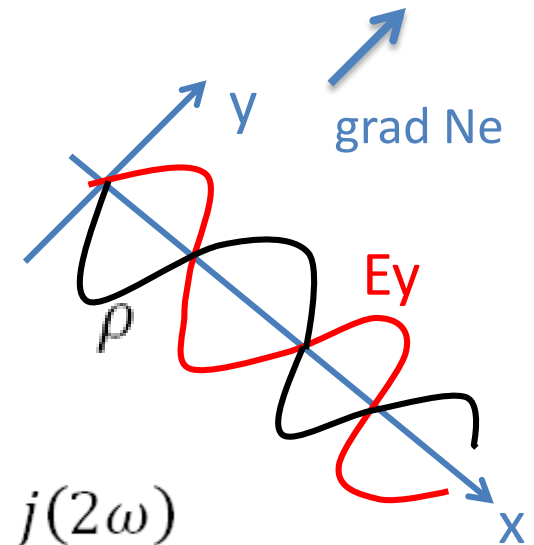


Генерация второй гармоники

$$\varepsilon = \varepsilon(y)$$

$$\rho = \frac{-\frac{d\varepsilon}{dy} E_y}{4\pi\varepsilon}$$

$$E_y(\omega), \rho(\omega) \rightarrow j(2\omega)$$



S. A. Shulyapov, K. Ivanov,
I. N. Tsymbalov et al. // *Journal of Physics: Conference Series*. —
2015. — Vol. 653, no. 3.
— P. 012007.

Двухплазменная неустойчивость

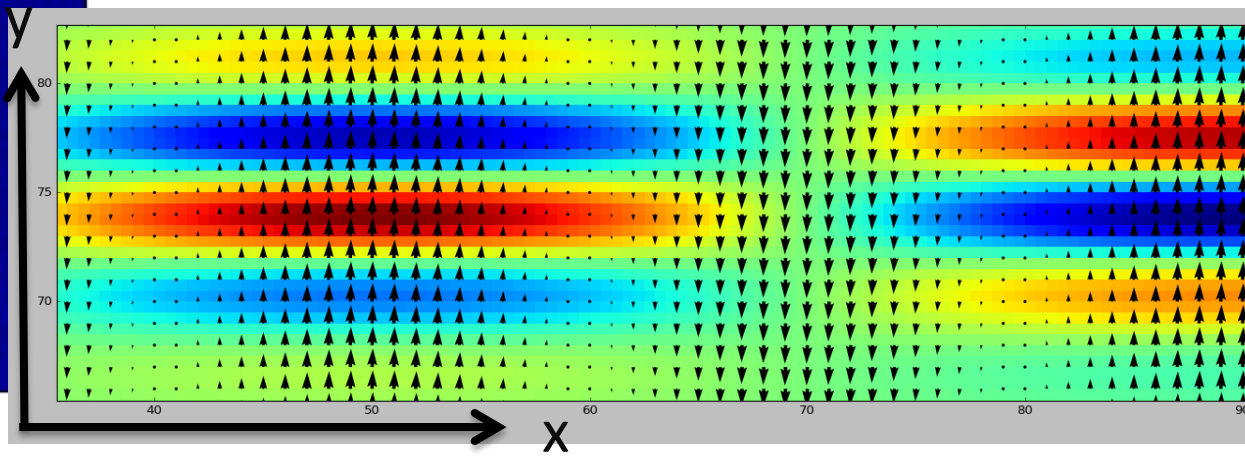
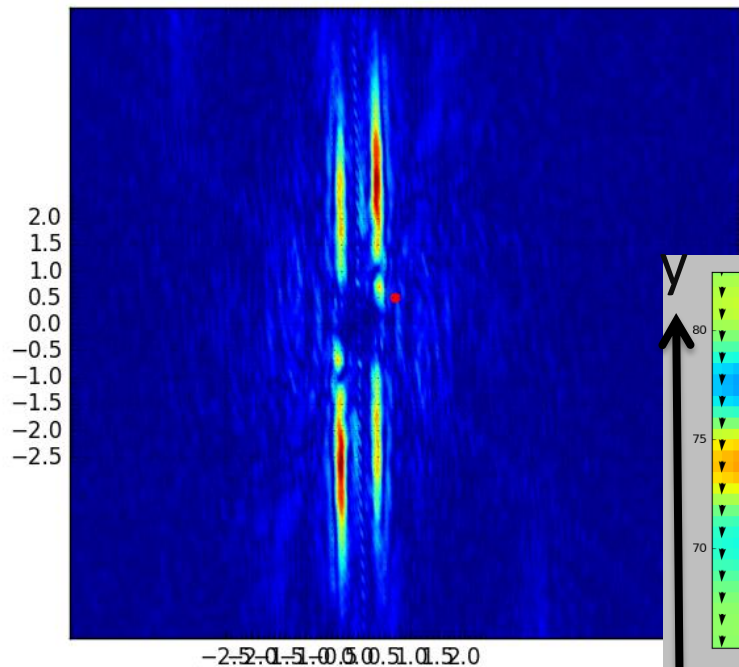
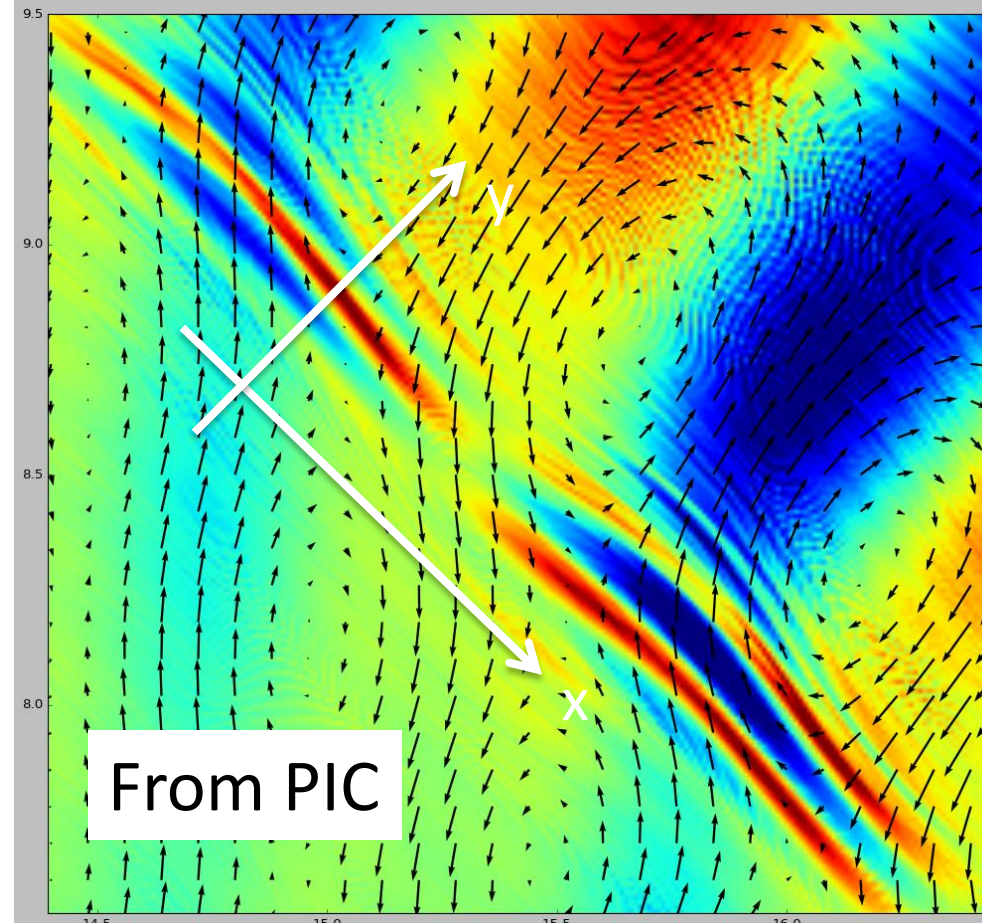
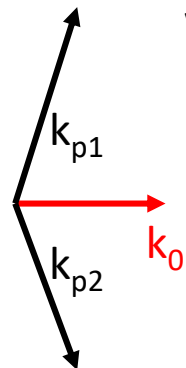
Color – electron density

Vectors – electric field (Ex,Ey)

$$\omega_{p1} + \omega_{p2} = \omega_0$$

$$k_{p1} + k_{p2} = k_0$$

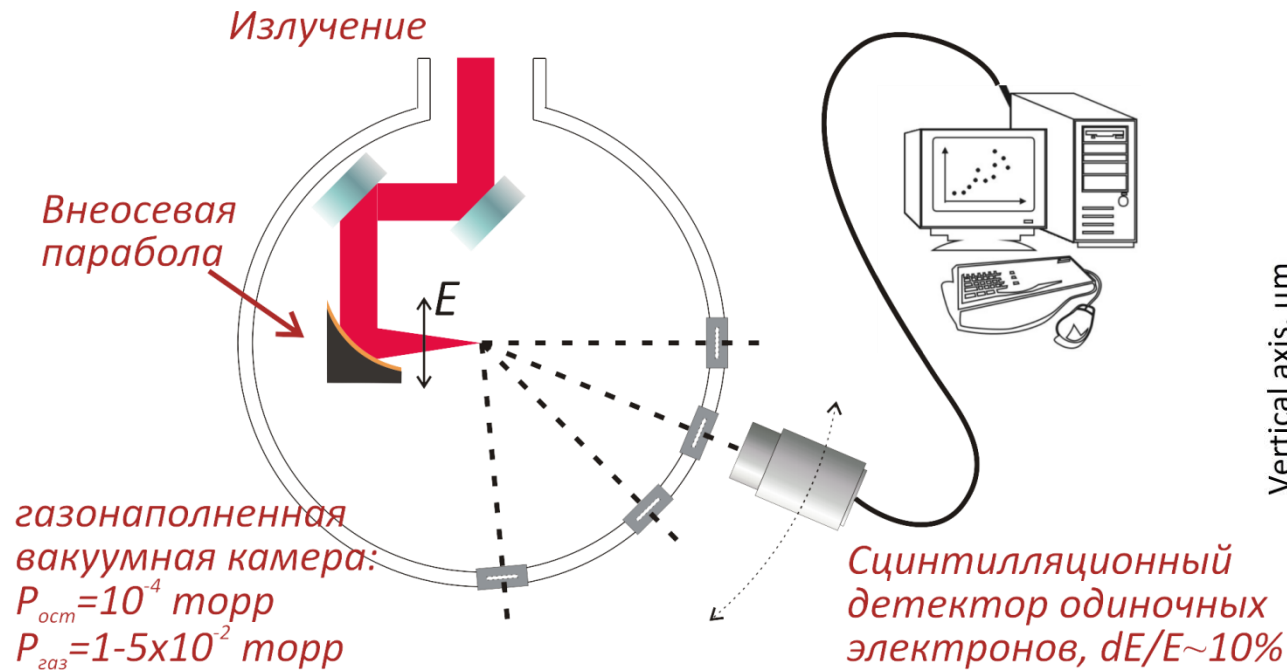
$$k_{p1} \approx -k_{p2}$$



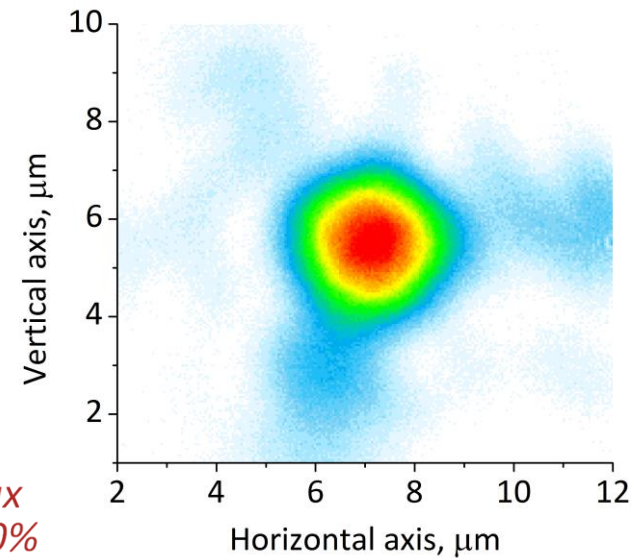
Восстановление параметров лазерного импульса³⁵ по энергии электронов, ускоренных в поле волны

Экспериментальное изучение ускорения электронов в поле импульса

Лазерное излучение *Ti:Sa*: $\tau=50$ фс, $\lambda=805$ нм, $E \sim 50$ мДж, $\nu=10$ Гц, $I_{peak} > 10^{19}$ Вт/см²



Распределение энергии
в фокусе зеркала



Восстановление параметров лазерного импульса³⁶ по энергии электронов, ускоренных в поле волны

Численное PIC моделирование воздействия импульса на разреженную плазму

*Экспериментальные
параметры импульса:*

$\tau=50$ фс, $\lambda=805$ нм,

$E\sim 50$ мДж, $I_{peak}>10^{19}$ Вт/см²

Параметры импульса в коде:

- $\lambda = 1$ мкм;

- $I_{peak}>2\times 10^{18}$ Вт/см²

- пятно – 2.5 мкм

– $\tau = 50$ фс

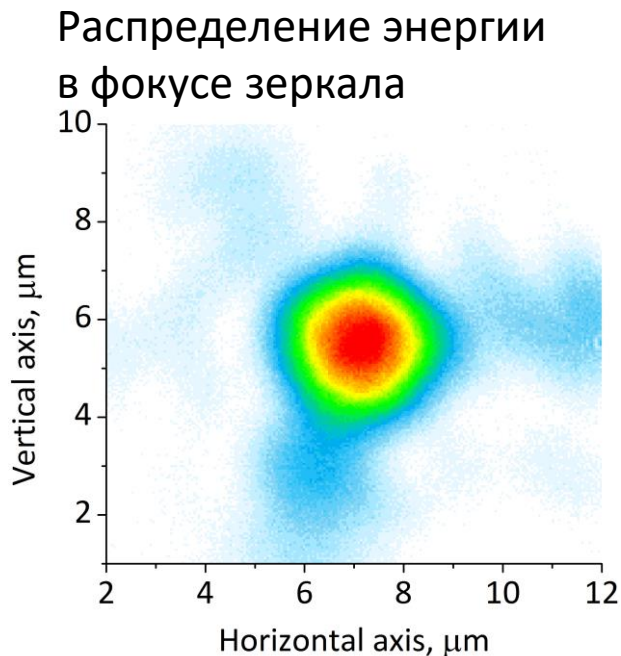
- Гауссово распределение по
времени и пространству

Параметры плазмы (газа):

- Аргон (ионизация включена)

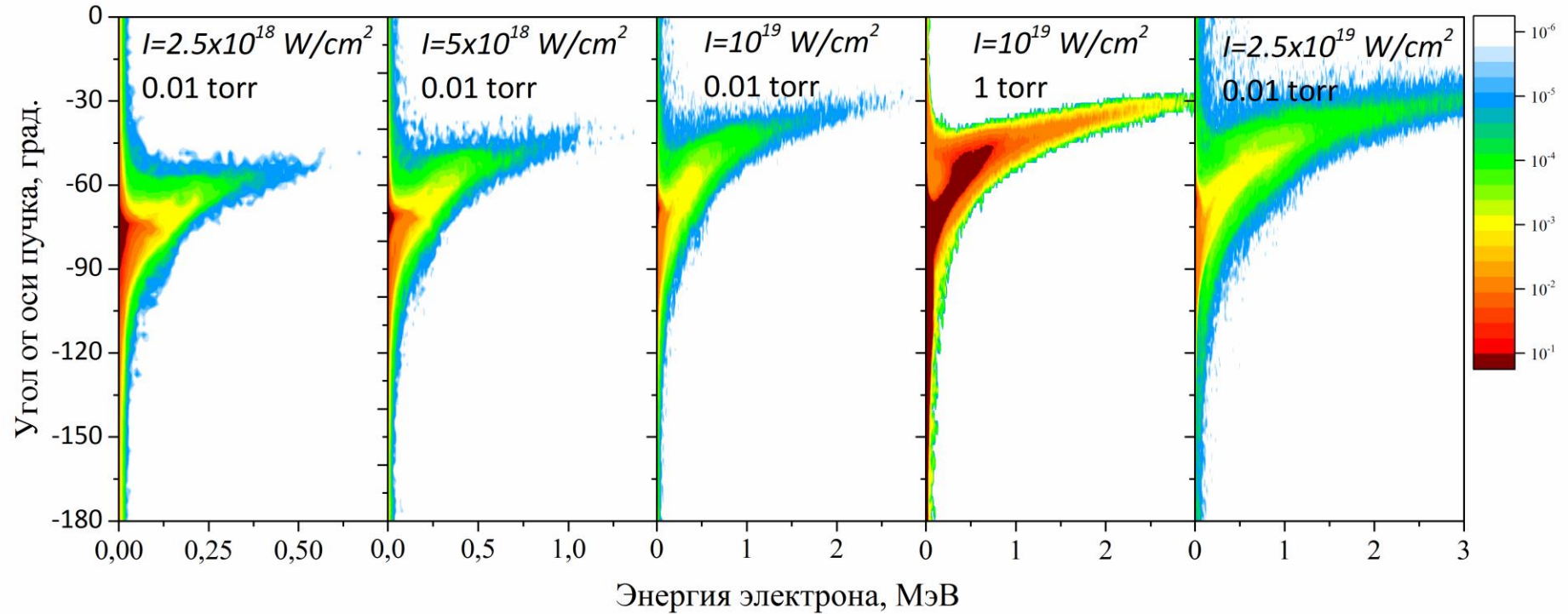
- Плотность: 10^{14} - 10^{16} см⁻³

(давление 10^{-2} - 10^0 торр)



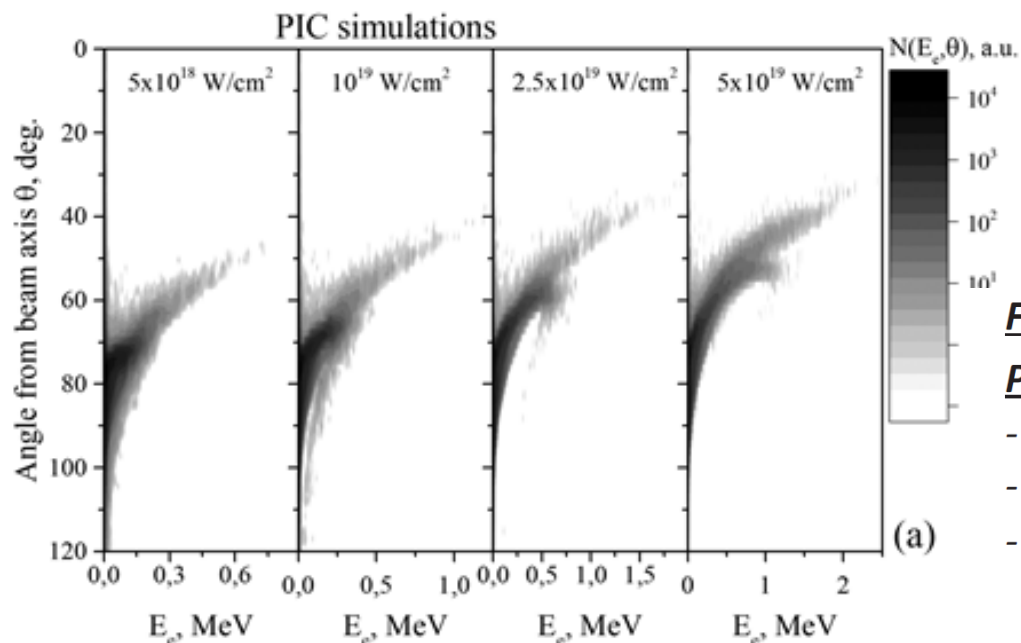
Восстановление параметров лазерного импульса³⁷ по энергии электронов, ускоренных в поле волны

Численное PIC моделирование воздействия импульса на разреженную плазму



Уменьшение угла вылета с
ростом интенсивности

- Определение интенсивности по спектру частиц в определенном телесном угле регистрации
- Измерение углового распределения абсолютного числа частиц



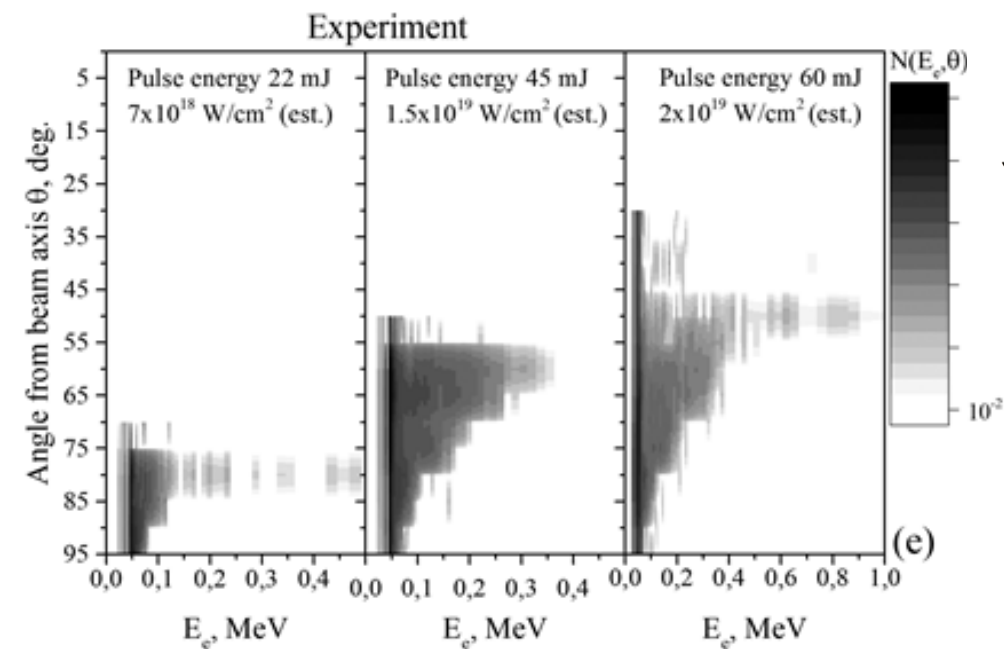
Fully relativistic code MANDOR (2D3V here)

Pulse parameters:

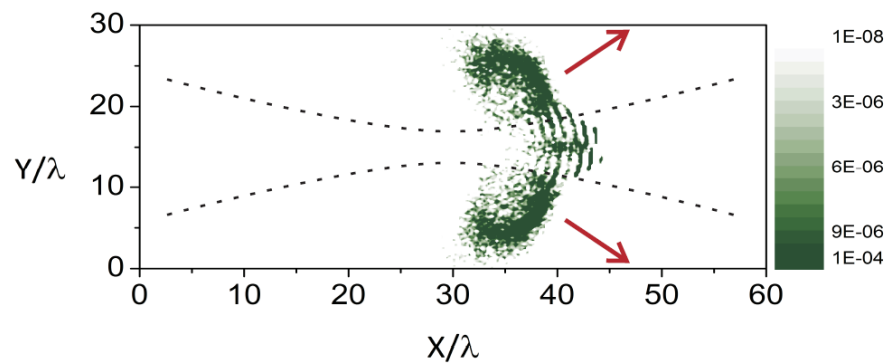
- wavelength – **1 μm** ;
- duration – **50 fs FWHM**;
- focal spot – **2.5 μm** ;

Simulation box:

- 30x60 μm
- Ar (ionization incl)
- Init. density 10^{14} cm^{-3}



Spatial distr. of electrons with $400 < E < 450 \text{ keV}$



Взаимодействие с микроструктурированными мишенями

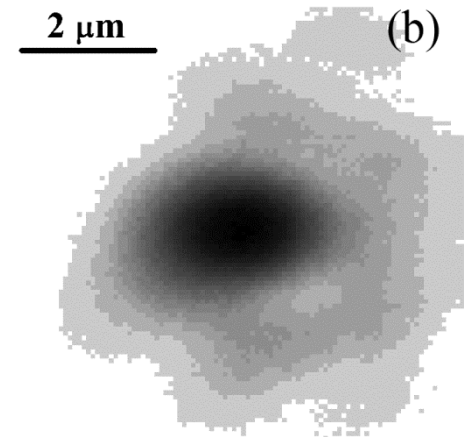
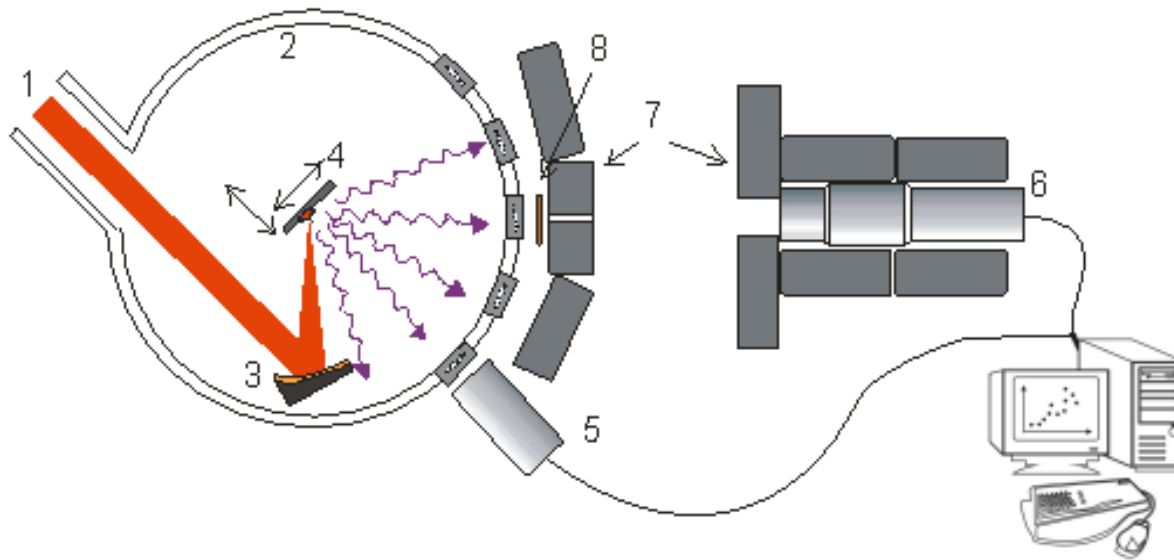
39

Ti:Sa laser radiation: $\tau=50\text{fs}$, $\lambda=805\text{ nm}$, $E\sim 20\text{ mJ}$, $\nu=10\text{Hz}$, $I_{\text{peak}}>10^{18}\text{ W/cm}^2$

Pulse contrast with XPW:

ASE $<10^{-10}$, ns and ps prepulses $<10^{-9}$

Focal spot energy distribution



$\sim 30\%$ of total pulse energy contained in the $\sim 2\text{ }\mu\text{m}$ at FWHM spot

1 – laser pulse; 2 – vacuum chamber; 3 – OAP ($F/D=3$)

4 – target; 5, 6 – X-ray detector; 7 – lead collimator

8 – metal filter

Accumulation of X-ray spectra for ~ 5.000 shots

PIC моделирование

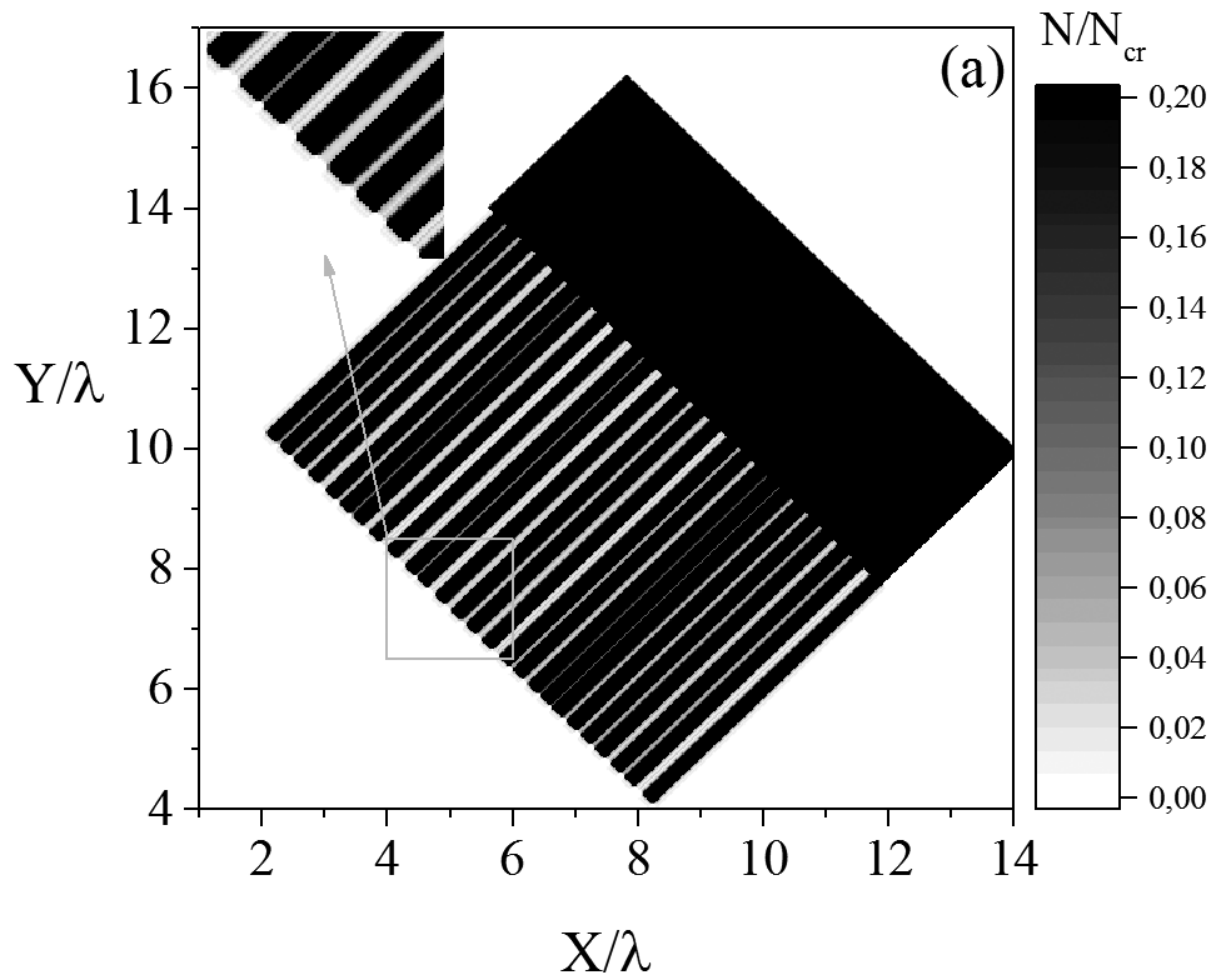
PIC code Mandor: temporal resolution – 0,003 fs, spatial resolution – $\lambda/100$

Laser pulse parameters:

- $\lambda = 1 \mu\text{m}$;
- $I_{\text{peak}} = 2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$
- focal spot – $4 \mu\text{m}$
- $\tau = 50 \text{ fs FWHM}$

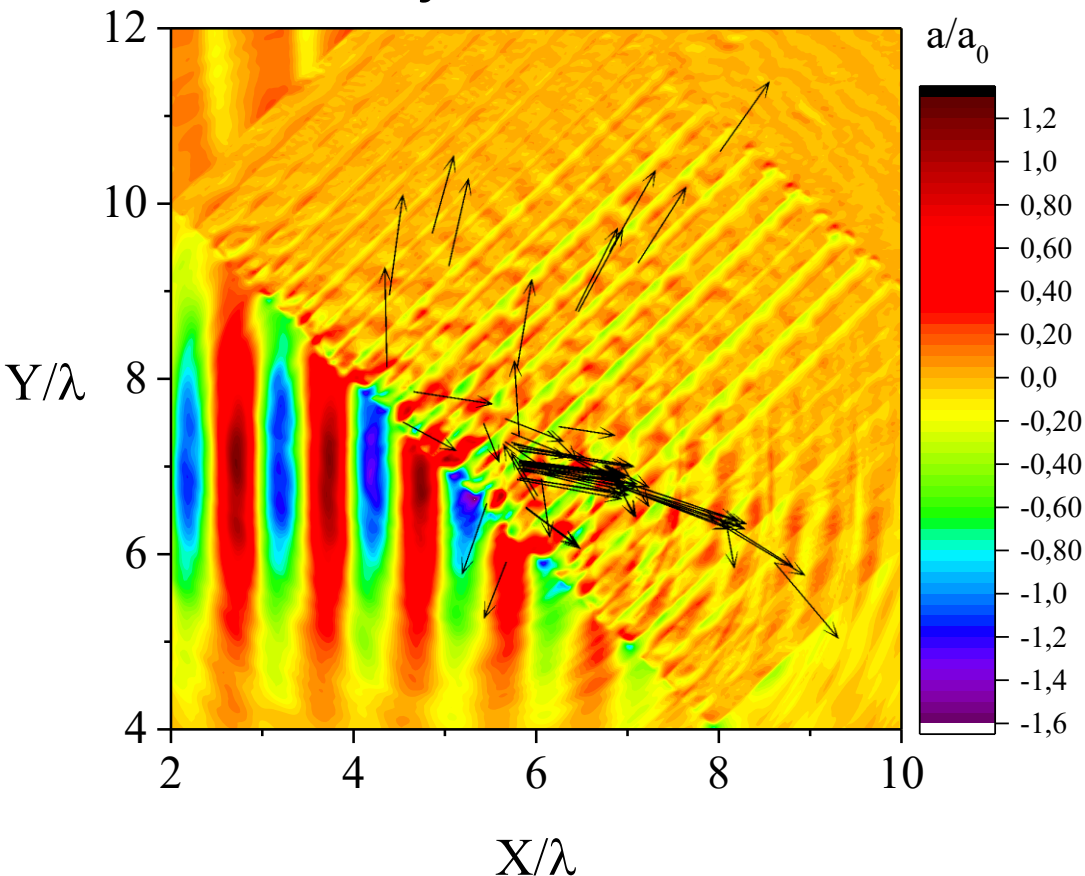
Target parameters:

- $n_e = 5 n_{\text{cr}}$;
- 200nm rods with 50-300 nm distance
- 1 and 5 μm length
- linear preplasma at any rod



РІС моделирование

Electric field distribution



Electrons expelling from the top of the rods and laser field propagation $\sim 1\mu\text{m}$ in between of the rods

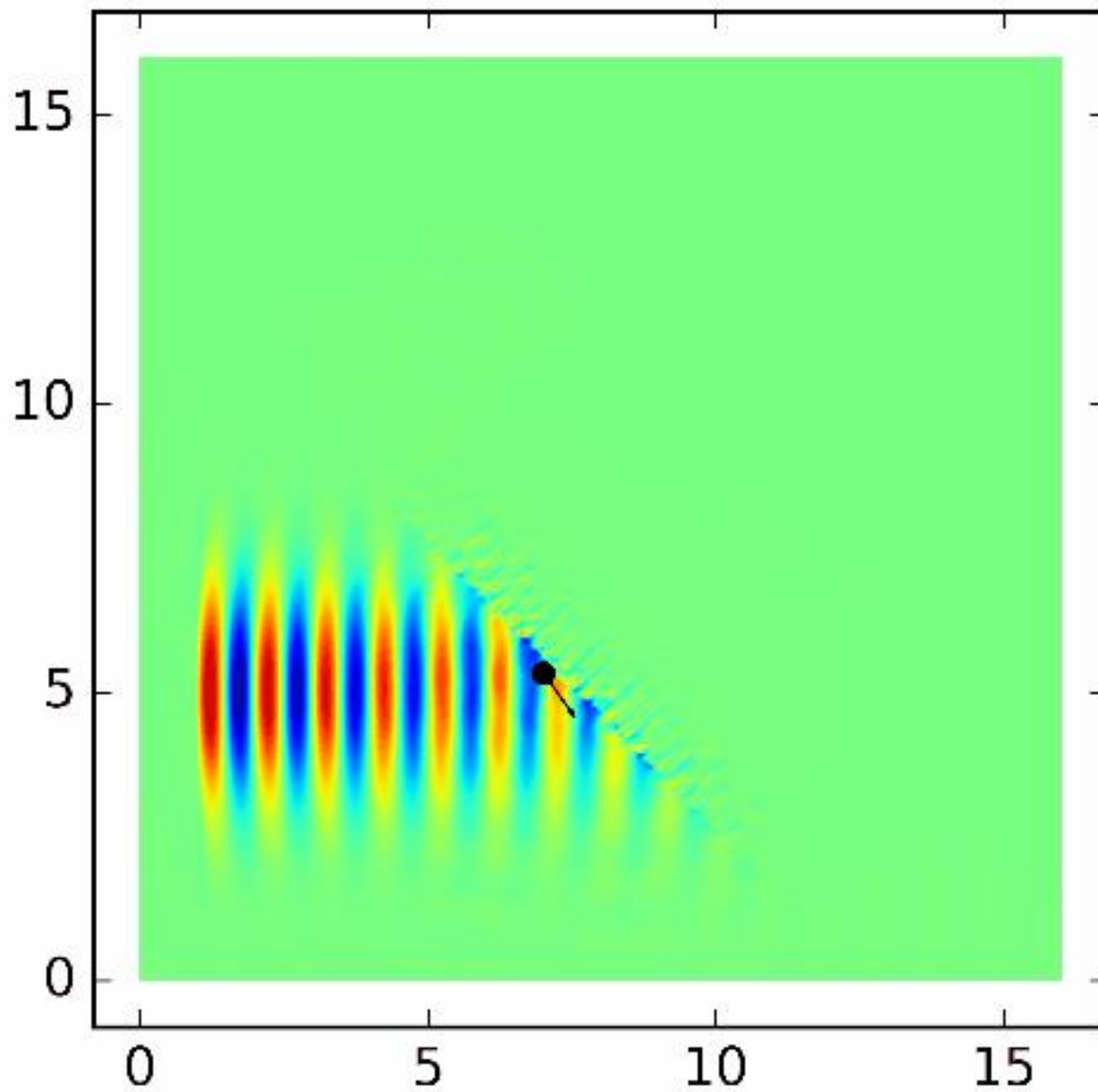
Formation of two hot particles groups penetrating into the target.

K. A. Ivanov, D. A. Gozhev,
S. P. Rodichkina et al. // *Applied Physics B: Lasers and Optics*. — 2017. — Vol. 123, no. 10. — P. 252.

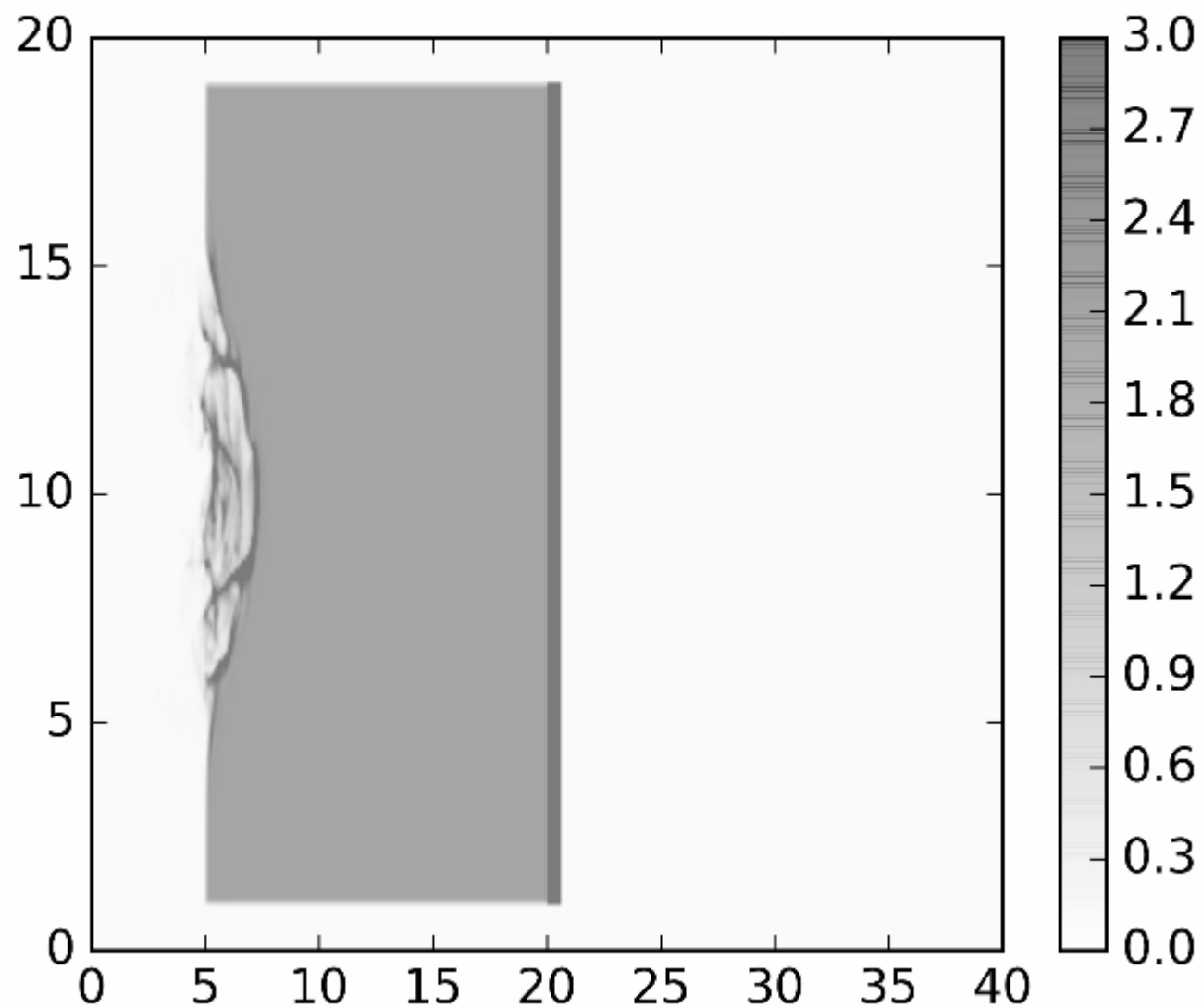
Increased hot electron production at interaction with nanograss vs. flat substrate

No substantial difference for 1 and 5 μm rods

Взаимодействие с микроструктурированной мишенью



Взаимодействие с низкоплотной мишенью



Заключение

- Взаимодействие мощного лазерного излучения с плазмой – быстроразвивающаяся область физики высоких энергий, имеющая целый ряд практических применений.
- Трехмерный численный код является мощным инструментом, позволяющим моделировать процессы, протекающие в плазме, объяснять экспериментальные результаты и предсказывать оптимальные условия взаимодействия. Трехмерное моделирование является необходимым условием для описания плазмы.
- Сопоставление экспериментальных и расчетных результатов позволяет лучше понять физику взаимодействия лазерного излучения с плазмой, открывать новые физические явления и предлагать наиболее оптимальные схемы.

Спасибо за внимание

Численное моделирование

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E} & \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho & \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\vec{v}) d\vec{v} & \vec{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha}(\vec{v}) d\vec{v} \\ \vec{p} = \gamma m \vec{v} & \\ \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) f_{\alpha} + q_{\alpha} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{p}} = 0 & \end{array} \right.$$

Схема Yee

$$\begin{aligned}
 \frac{H_{x_{i,j-0.5,k-0.5}}^{n+0.5} - H_{x_{i,j-0.5,k-0.5}}^{n-0.5}}{\tau} &= \frac{E_{y_{i,j-0.5,k}}^n - E_{y_{i,j-0.5,k-1}}^n}{h_3} - \frac{E_{z_{i,j,k-0.5}}^n - E_{z_{i,j-1,k-0.5}}^n}{h_2} \\
 \frac{H_{y_{i-0.5,j,k-0.5}}^{n+0.5} - H_{y_{i-0.5,j,k-0.5}}^{n-0.5}}{\tau} &= \frac{E_{z_{i,j,k-0.5}}^n - E_{z_{i-1,j,k-0.5}}^n}{h_1} - \frac{E_{x_{i-0.5,j,k}}^n - E_{x_{i-0.5,j,k-1}}^n}{h_3} \\
 \frac{H_{z_{i-0.5,j-0.5,k}}^{n+0.5} - H_{z_{i-0.5,j-0.5,k}}^{n-0.5}}{\tau} &= \frac{E_{x_{i-0.5,j,k}}^n - E_{x_{i-0.5,j-1,k}}^n}{h_2} - \frac{E_{y_{i,j-0.5,k}}^n - E_{y_{i-1,j-0.5,k}}^n}{h_1}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь E_x, E_y, E_z - значения компонент поля, верхний индекс n обозначает временную сетку, а нижние индексы i, j, k - компоненты пространственной сетки. Таким образом, интегрирование идет с перешагиванием:

$$\{\vec{H}^{n-0.5}, \vec{E}^n\} \rightarrow \{\vec{H}^{n+0.5}, \vec{E}^n\} \rightarrow \{\vec{H}^{n+0.5}, \vec{E}^{n+1}\} \rightarrow \dots \tag{4.4}$$

Схема Бориса

- Ускорение эл. полем в течение полушага по времени
- Поворот в магнитном поле
- Завершающее ускорение в эл. поле

Схема Бориса

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{u}_i^{n+0.5} - \bar{u}_i^{n-0.5}}{\tau} = \frac{q}{M} \cdot \left(\vec{E}^n + \frac{1}{2} [\bar{v}_i^{n-0.5} + \bar{v}_i^{n+0.5}, \vec{H}^n] \right) \\ \frac{\bar{r}_i^{n+0.5} - \bar{r}_i^{n-0.5}}{\tau} = \bar{v}_i^{n+0.5} \end{array} \right.$$