СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАССЕЯНИЯ

Сетуха А.В., д.ф.-м.н., проф., в.н.с., МГУ им. М.В. Ломоносова

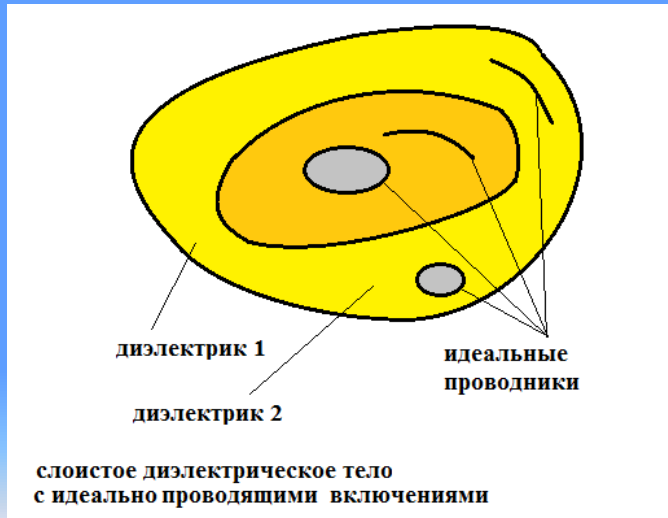
Апаринов А.А., к.ф.-м.н., с.н.с., ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского

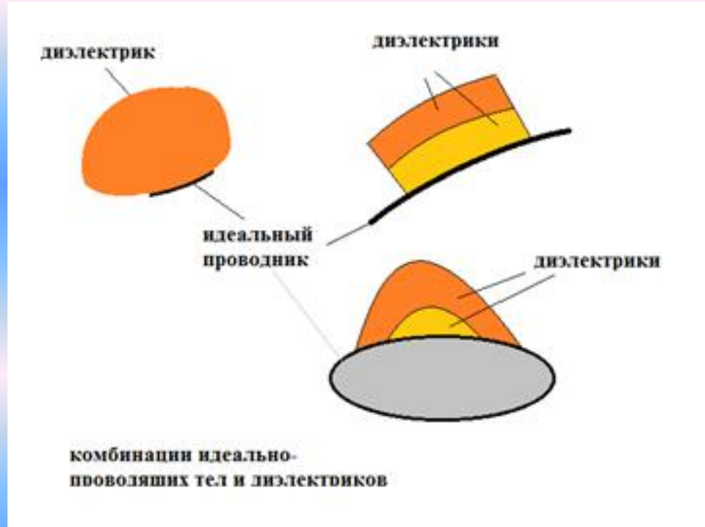
Ставцев С.Л., к.ф.-м.н., доцент, с.н.с., ИВМ РАН

Фетисов С.Н., инженер-конструктор, ОКБ им. А. Люльки

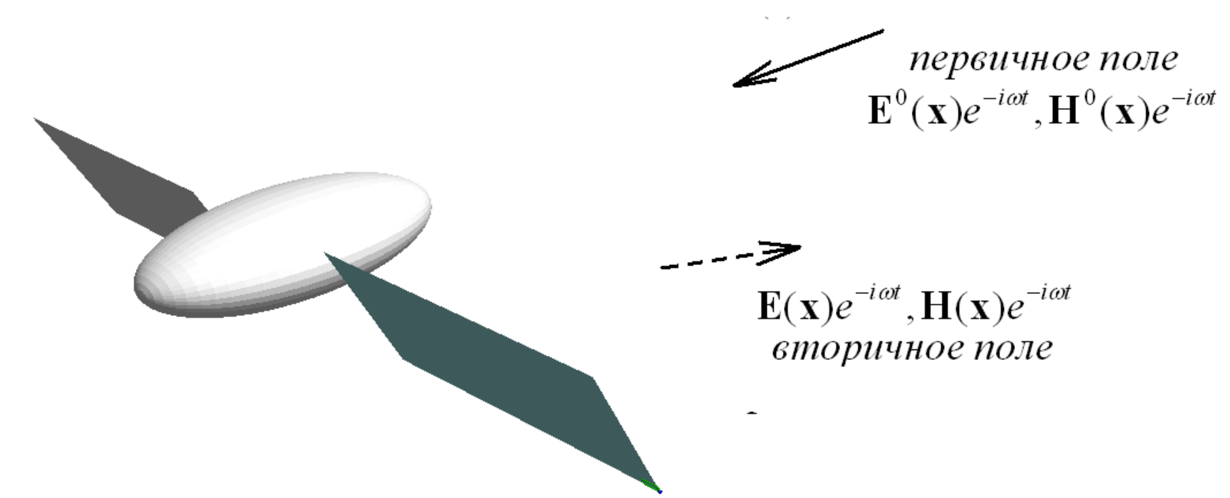
Типы решаемых задач (по свойствам моделируемых отражающих тел)

Во всех случаях решается задача рассеяния первичного монохроматического поля. Определяется распределение электрического и магнитного полей во внешней среде и внутри диэлектрических объектов. Осуществляется расчет ЭПР (диаграмм рассеяния).





ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ



Ω - область вне идеально проводящих объектов

Первичное поле:

$\vec{\mathbf{E}}_i = \vec{\mathbf{E}}^0(x)e^{-i\omega t}, \ \vec{\mathbf{H}}_i = \vec{\mathbf{H}}^0(x)e^{-i\omega t}$

$\vec{\mathbf{E}}^0(x) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}},$

$$\vec{\mathbf{H}}^0(x) = \frac{e^{i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}}}{\omega\mu\mu_0}\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{H}}_0,$$

$\vec{\mathbf{k}} = k\vec{\mathbf{k}}_0$ - волновой вектор,

$\left|\vec{\mathbf{k}}_0\right| = 1, \ k^2 = \omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0,$

$\vec{\mathbf{r}}$ - радиус вектор точки x

Уравнения Максвелла: $rot\,\mathbf{E} = i\mu\mu_0\omega\mathbf{H}, \ rot\,\mathbf{H} = -i\varepsilon\varepsilon_0\omega\mathbf{E}$

Граничное условие для полного поля $\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}, \ \mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}$:

$\mathbf{E}_{tot} \times \mathbf{n} = 0$ на **идеально проводящих поверхностях**

$\left[\mathbf{E}_{tot}^+ - \mathbf{E}_{tot}^-\right] \times \mathbf{n} = 0, \ \left[\mathbf{H}_{tot}^+ - \mathbf{H}_{tot}^-\right] \times \mathbf{n} = 0$ **на границах раздела сред (прямой контакт)**

Условие Майкснера: $\mathbf{E} \in L_2^{loc}(\Omega)$

Условия излучения Зоммерфельда: $$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} - ik\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty.$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ И ЭКРАНОВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}[\Sigma, \mathbf{j}](\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

$$\mathbf{K}[\Sigma, \mathbf{j}](\mathbf{x}) = grad\, div \iint_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) F(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\sigma_y + k^2 \iint_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) F(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\sigma_y,\; F(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{e^{ikR}}{R},\; R = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Ядро интегрального представления:

$$\mathbf{K}[\Sigma, \mathbf{j}](\mathbf{x}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{K}(\mathbf{j}(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\sigma_y$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{j}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = grad_{\mathbf{x}}\, div_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{j} F(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right) + k^2 \mathbf{j} F(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\; \mathbf{j} \in C^3, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{j}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{K}_0(\mathbf{j}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{K}_1(\mathbf{j}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{j}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-\mathbf{j} + 3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j})}{R^3},$$

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{j}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\mathbf{j} - 3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j}) \right) \frac{1 - e^{ikR} + ikRe^{ikR}}{R^3} + \left(\mathbf{j} - \mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{j}) \right) \frac{k^2 e^{ikR}}{R},$$

$$|\mathbf{K}_0(\mathbf{j}, \mathbf{x}, \mathbf{y})| \le O\left(\frac{1}{R^3} \right), |\mathbf{K}_1(\mathbf{j}, \mathbf{x}, \mathbf{y})| \le O\left(\frac{1}{R} \right),\; \mathbf{r} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{R},\; R = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

КРАЕВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Пусть $\Sigma \in C^3$ - ориентированная замкнутая или разомкнутая поверхность, $\Omega = R^3 \setminus \Sigma$.

$$\mathbf{j}(\mathbf{y}) = (j_1(\mathbf{y}), j_2(\mathbf{y}), j_3(\mathbf{y})),\ \ j_i \in C^2(\Sigma),\ i = 1,2,3$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{K}(\mathbf{j}(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\sigma_y,\ \ \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тогда на поверхности существуют краевые значения $\mathbf{E}^{\pm}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Sigma$, причем,

$$\mathbf{E}^{\pm} = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \pm 2\pi\, \mathbf{n}(\mathbf{x})\, Div\, \mathbf{j},\ \mathbf{x} \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$$

$\mathbf{E}(\mathbf{x})$ - прямое значение, понимаемое в смысле конечного значения по Адамару:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{K}(\mathbf{j}(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \iint_{\Sigma \setminus U_\varepsilon(\mathbf{x})} \mathbf{K}(\mathbf{j}(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\sigma_y - \frac{\pi \mathbf{j}(\mathbf{x})}{\varepsilon} \right\},\ \ \mathbf{x} \in \Omega.$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{K}(\mathbf{j}(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\sigma_y = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Sigma,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{E}^0(\mathbf{x}).$$

МЕТОД ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрение уравнения как псевдодифференциального:

$\mathbf{K}\,\mathbf{j} = \mathbf{f}$ линейное уравнение относительно $\mathbf{j}$

уравнение рассматривается в классе обобщенных функций

$\mathbf{j}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i$, $\left(\mathbf{K}\,\mathbf{j}, \mathbf{u}_j\right) = \left(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j\right)$ - метод конечных элементов (метод моментов)

- RAO S.M., WILTON D., AND GLISSON A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // Antennas and Propagation. 1982. 30. №3. 409-418 (метод RWG)
- ИЛЬИНСКИЙ А.С., СМИРНОВ Ю.Г. -Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Псевдо дифференциальные операторы в задачах дифракции. - М.: ИПРЖ "Радиотехника" Москва, - 1996, - 176 с.
- СМИРНОВ Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики. - Пенза: Информационно издательский центр ПензГУ. 2009. 268с.

2. Рассмотрение уравнения как гиперсингулярного

- кусочно-постоянные аппроксимации

ДАВЫДОВ А.Г., ЗАХАРОВ Е.В., ПИМЕНОВ Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы. - ДАН, 1984, т. 276, №1, с. 96-100.

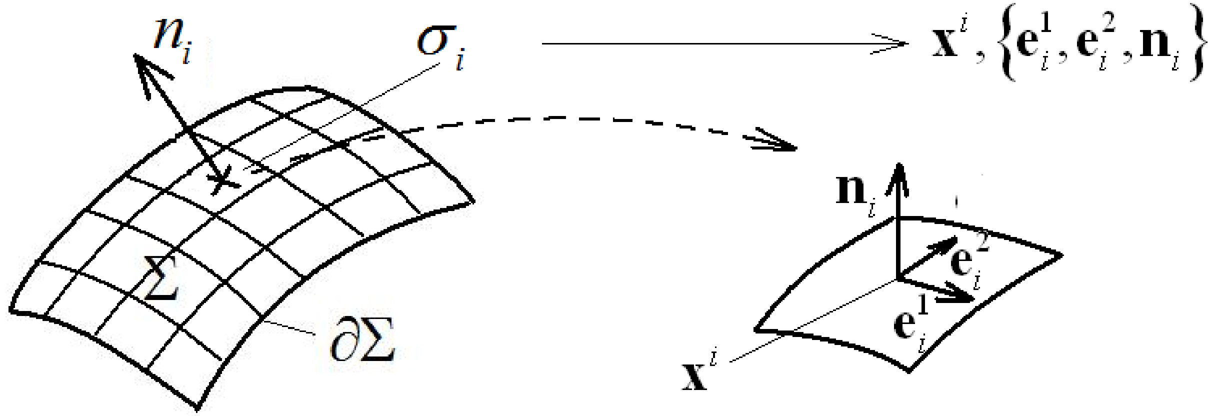
- квадратурные формулы, не требующие параметризации поверхности

ЛИФАНОВ И.К., ПЕТРОВ Д.Ю.

- квадратурные формулы с выделением главной особенности, случай криволинейных ячеек

- ЗАХАРОВ Е. В., РЫЖАКОВ Г. В., СЕТУХА А. В. *Численное решение трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеальнопроводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений* // Дифференциальные уравнения. — *2014. — Т. 50, № 9. — С. 1253–1263.*

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА
АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА



Кусочно-постоянная аппроксимация токов на ячейках

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{j}(\mathbf{x}^i),\ i = 1,\dots,n$$

$$\mathbf{K}_\Sigma[\Sigma, \vec{j}\,] \approx \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathbf{K}}[\sigma_i, \vec{j}_i]\ ,\ \tilde{\mathbf{K}}[\sigma_i, \vec{j}_i] = \tilde{\mathbf{K}}^0[\sigma_i, \vec{j}_i] + \tilde{\mathbf{K}}^1[\sigma_i, \vec{j}_i]$$

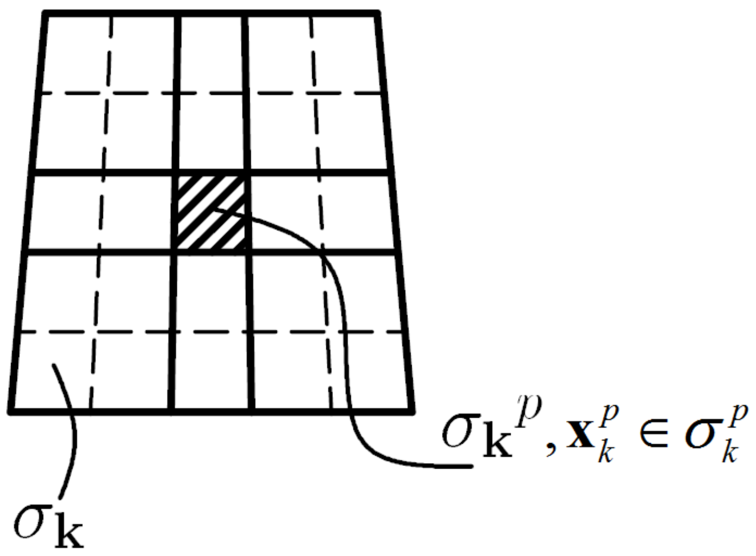
<u>аппроксимация гиперсингулярной части:</u>

$$\tilde{\mathbf{K}}^0[\sigma_i, \mathbf{j}_i](\mathbf{x}) = \int_{\sigma_i} \mathbf{K}_0(\mathbf{j}_i^*(y), \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\sigma_y\ ,\ \mathbf{j}_i^*(\mathbf{y}) = (\mathbf{j}_i \times \mathbf{n}_i) \times \mathbf{n}(\mathbf{y}),$$

$$\int_{\sigma_i} \mathbf{K}_0(\mathbf{j}_i^*(y), \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\sigma_y = grad \oint_{\partial\sigma_i} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{j}_i^*(\mathbf{y}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}))\, ds_y$$

$$grad \int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} ds_y = \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{|\mathbf{x}-\mathbf{b}|} \right) \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}||\mathbf{x}-\mathbf{b}| + (\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{x}-\mathbf{b})}$$

аппроксимация слабосингулярной части:



$$\tilde{\mathbf{K}}^1[\sigma_i, \mathbf{j}_i](\mathbf{x}) = \int\limits_{\sigma_i} \mathbf{K}^1(\mathbf{j}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\sigma_y$$

вычисление по формуле прямоугольников с домножением на сглаживающую функцию:

$$\tilde{\mathbf{K}}^1[\sigma_i, \mathbf{j}_i](\mathbf{x}) \approx \sum\nolimits_{p=1}^{P} \mathbf{K}^1(\mathbf{j}_i, \mathbf{x}, \mathbf{x}_i^p)\, \theta_\varepsilon\left(\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^p\right|\right) s_i^p$$

сглаживающий множиитель:

$$\theta_\varepsilon(r) = \begin{cases} 3\left(\dfrac{r}{\varepsilon}\right)^3 - 2\left(\dfrac{r}{\varepsilon}\right)^2 & \text{при} \quad r < \varepsilon \\ 1 & \text{при} \quad r \geq \varepsilon \end{cases}$$

АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$\mathbf{n}(\mathbf{x})\times\mathbf{E}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Sigma \quad\Rightarrow\quad \mathbf{n}_i\times\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mathbf{K}}[\sigma_k,\mathbf{j}_k](\mathbf{x}^i)=\mathbf{f}(\mathbf{x}^i),\ i=1,\ldots,n$$

<u>**Операторная запись дискретной схемы**</u>

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{A}_{ik}\mathbf{j}_k=\mathbf{f}(\mathbf{x}^i),\quad i=1,\ldots,n$$

$\mathbf{A}_{ik}\mathbf{j}_k=\mathbf{n}_i\times\tilde{\mathbf{K}}[\sigma_k,\mathbf{j}_k](x^i)$, $\mathbf{A}_{ik}:T_k\to T_i$, T_i - множество векторов, ортогональных $\mathbf{n}_i$.

<u>**Преобразование к СЛАУ**</u>

$$\mathbf{j}=j^1\mathbf{e}_k^1+j^2\mathbf{e}_k^2,\quad \mathbf{A}_{ik}\mathbf{j}_k=c_{ik}^1\mathbf{e}_k^1+c_{ik}^2\mathbf{e}_k^2\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}c_{ik}^1\\ c_{ik}^2\end{pmatrix}=A_{ik}\begin{pmatrix}j^1\\ j^2\end{pmatrix},$$

$$A_{ik}=\left(a_{ik}^{ml}\right)_{2\times2},\ a_{ik}^{ml}=\left(\mathbf{n}_i\times\tilde{\mathbf{K}}[\sigma_k,\mathbf{e}_k^l](\mathbf{x}^i),\mathbf{e}_i^m\right)$$

$$f_i^m=\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}^i),\mathbf{e}_i^m\right)$$

ОСНОВНАЯ СЛАУ

$$\sum_{\substack{k=1,\ldots,n\\ l=1,2}}a_{ik}^{ml}j_k^l=f_i^m,\ i=1,\ldots,n,\ m=1,2.$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ СИСТЕМЫ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД, ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ И ЭКРАНОВ

Идея метода:

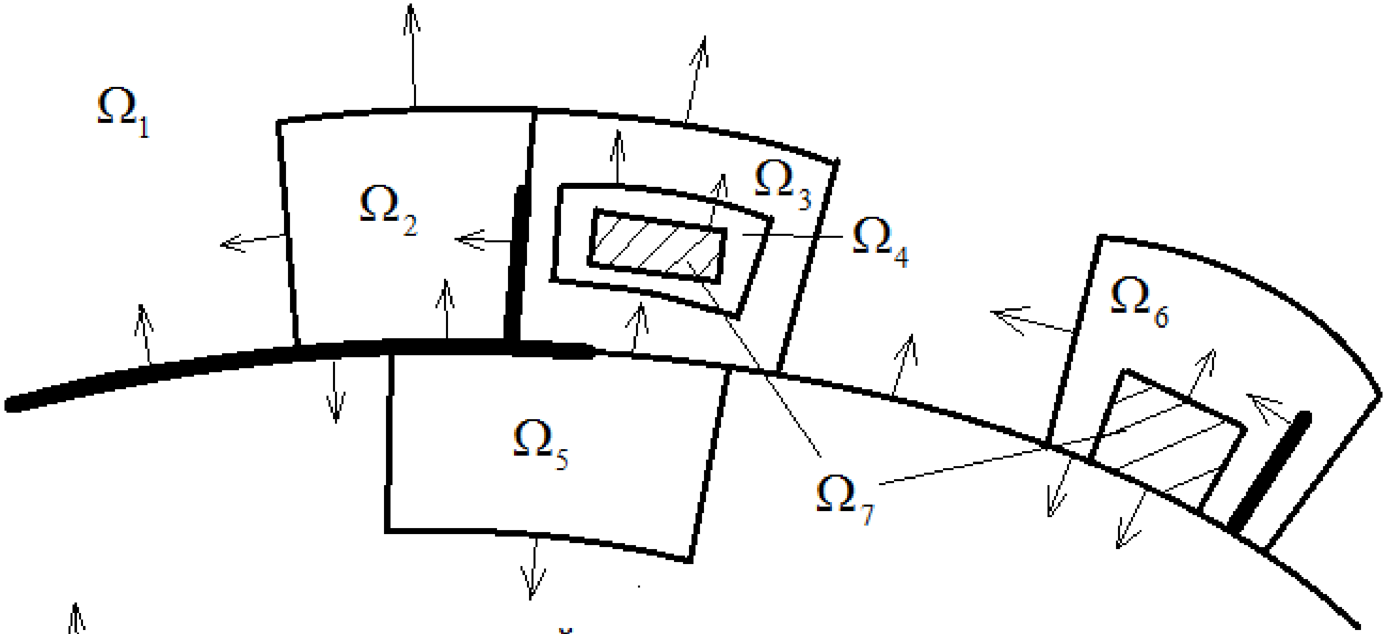
A. G. Davydov, E. V. Zakharov, and Yu. V. Pimenov (**А.Г.** Давыдов, Е.В.Захаров, Ю.В.Пименов), Hypersingular integral equations for the diffraction of electromagnetic waves on homogeneous magneto-dielectric bodies. *Comput. Math. Model.* **17**, No. 2 (2006), 97–104.

Развитие метода:

Захаров Е. В., Сетуха А. В., Безобразова Е. Н. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений в трехмерной задаче дифракции электромагнитных волн на кусочно-однородном диэлектрическом теле // *Дифференциальные уравнения*. — 2015. — Т. 51, № 9. — С. 1206–1219.

Setukha A. V., Bezobrazova E. N. The method of hypersingular integral equations in the problem of electromagnetic wave diffraction by a dielectric body with a partial perfectly conducting coating // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2017. — Vol. 32, no. 6. — P. 371–380

СТРУКТУРА ОТРАЖАЮЩИХ ТЕЛ



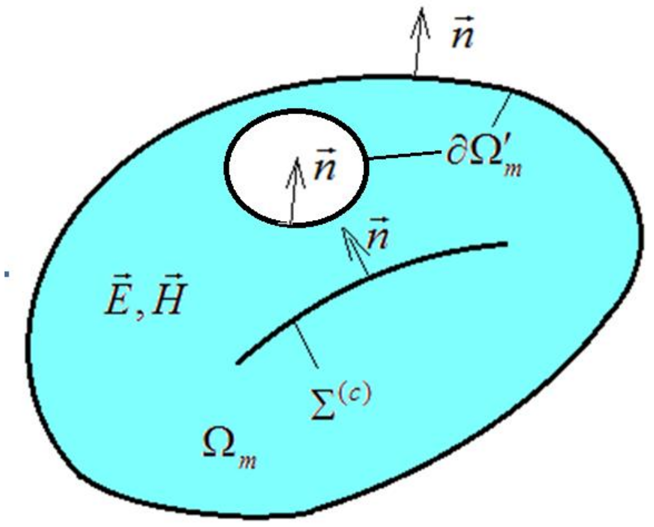
- вектора положительной нормали

- идеально - проводящие границы диэлетрических областей

- границы раздела сред (диэлектрические и границы проводящих областей)

- идеально - проводящие области

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ФОРМУЛЫ СТРЕТТОНА-ЧУ



Ω_m - область занятая однородным диэлектриком

$\partial\Omega'_m$ - граница области Ω_m без идеально проводящих экранов

$\mathbf{j}_E = -\mathbf{n}\times\mathbf{H},\ \mathbf{j}_M = \mathbf{n}\times\mathbf{E}$ на границе $\partial\Omega'_m$

$\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_E^{+} - \mathbf{j}_E^{-}$ на экране $\Sigma^{(c)}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{i}{\omega\varepsilon_m}\mathbf{K}_m[\partial\Omega'_m, \mathbf{j}_E] - \mathbf{R}_m[\partial\Omega'_m, \mathbf{j}_M] + \frac{i}{\omega\varepsilon_m}\mathbf{K}_m[\Sigma^{(c)}, \mathbf{j}_E]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{i}{\omega\mu_m}\mathbf{K}_m[\partial\Omega'_m, \mathbf{j}_M] + \mathbf{R}_m[\partial\Omega'_m, \mathbf{j}_E] + \frac{i}{\omega\mu_m}\mathbf{R}_m[\Sigma^{(c)}, \mathbf{j}_E]$$

$$\mathbf{K}_m[\Sigma, \mathbf{j}] = grad\,div\iint_{\Sigma}\mathbf{j}(\mathbf{y})F_m(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\sigma_y + k^2\iint_{\Sigma}\mathbf{j}(\mathbf{y})F_m(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\sigma_y, \quad x\in\Omega_m.$$

$$\mathbf{R}_m[\Sigma, \mathbf{j}](x) = \int_{\Sigma} rot_x[\mathbf{j}(y)F_m(x-y)]d\sigma_y, \quad x\in\Omega_m$$

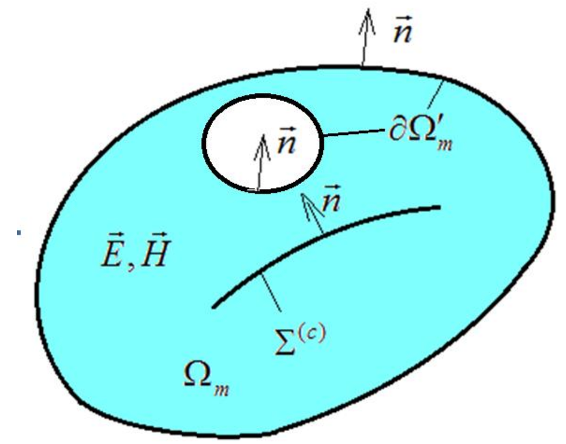
$$F_m(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|, k = \frac{\omega}{c_m}, c_m = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m\mu_m}}.$$

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Краевые значения интегральных операторов:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_m[\Sigma, \mathbf{j}_E] \;\Rightarrow\; \mathbf{E}^{\pm} = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \pm \tfrac{1}{2}\mathbf{n}(\mathbf{x})\, Div\,\mathbf{j}\,,\;\; \mathbf{x} \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_m[\Sigma, \mathbf{j}_E] \;\Rightarrow\; \mathbf{E}^{\pm} = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \pm \tfrac{1}{2}\mathbf{j}\times\mathbf{n},\;\; \mathbf{x} \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$$



Неизвестные поверхностные токи:

Для каждой области Ω_m, занятой диэлектриком:

$\mathbf{j}_E = -\mathbf{n}\times\mathbf{H},\; \mathbf{j}_M = \mathbf{n}\times\mathbf{E}$ на границе $\partial\Omega'_m$,

Для каждого экрана $\Sigma^{(c)}$

$\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_E^{+} - \mathbf{j}_E^{-}$ на экране $\Sigma^{(c)}$

$$\frac{1}{2}\mathbf{j}_M + \mathbf{n}\times\left\{\frac{i}{\omega\varepsilon_m}\mathbf{K}_m[\partial\Omega'_m, \mathbf{j}_E] - \mathbf{R}_m[\partial\Omega'_m, \mathbf{j}_M] + \frac{i}{\omega\varepsilon_m}\mathbf{K}_m[\Sigma^{(c)}, \mathbf{j}_E]\right\} = -\delta_1^m \mathbf{n}\times\mathbf{E}_{inc} \text{ на } \partial\Omega'_m$$

$$\mathbf{n}\times\left\{\frac{i}{\omega\varepsilon_m}\mathbf{K}_m[\partial\Omega'_m, \mathbf{j}_E] - \mathbf{R}_m[\partial\Omega'_m, \mathbf{j}_M] + \frac{i}{\omega\varepsilon_m}\mathbf{K}_m[\Sigma^{(c)}, \mathbf{j}_E]\right\} = -\delta_1^m \mathbf{n}\times\mathbf{E}_{inc} \text{ на } \Sigma^{(c)} \subset \bar{\Omega}_m$$

Соотношения между токами на границе раздела сред

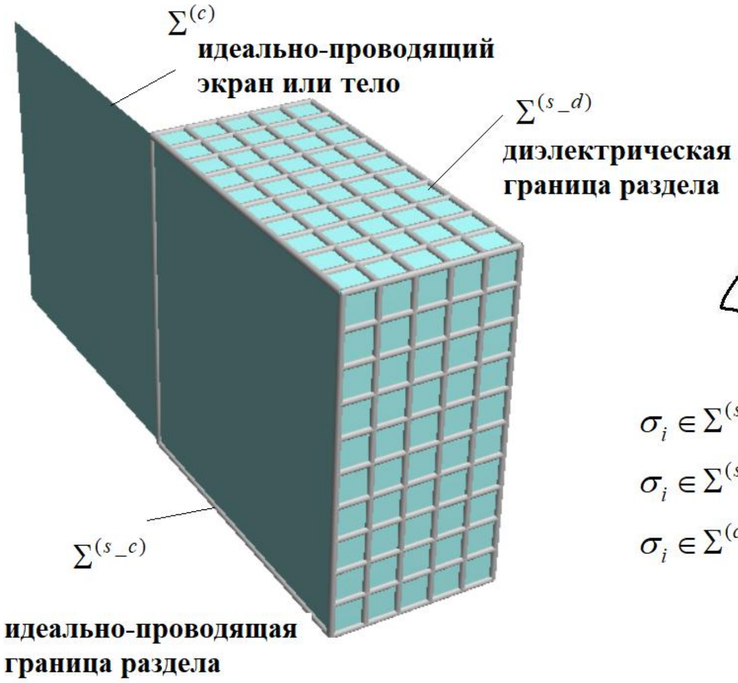
$$\begin{cases} \vec{j}_E^{\,-} = -\vec{j}_1 - \delta_i^1\, \vec{j}_{E\_ent} \\ \vec{j}_M^{\,-} = -\vec{j}_2 - \delta_i^1\, \vec{j}_{M\_ent} \end{cases}$$

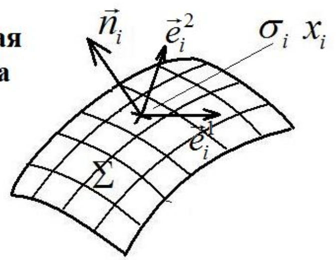
на диэлектрической границе

$$\begin{cases} \vec{j}_M^{\,+} = -\delta_i^1\, \vec{j}_{M\_ent} \\ \vec{j}_M^{\,-} = 0 \end{cases}$$

на идеально-проводящей границе

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА





$$\sigma_i \in \Sigma^{(s\_d)} \to \mathbf{j}_{1,i} \approx \mathbf{j}_E^+(\mathbf{x}^i), \mathbf{j}_{2,i} \approx \mathbf{j}_M^+(\mathbf{x}^i)$$

$$\sigma_i \in \Sigma^{(s\_c)} \to \mathbf{j}_{1,i} \approx \mathbf{j}_E^+(\mathbf{x}^i), \mathbf{j}_{2,i} \approx \mathbf{j}_E^-(\mathbf{x}^i)$$

$$\sigma_i \in \Sigma^{(c)} \to \mathbf{j}_{1,i} \approx \mathbf{j}_E(\mathbf{x}^i)$$

Аппроксимация интегральных операторов

$$\mathbf{K}_\Sigma[\Sigma, \mathbf{j}] \approx \sum\nolimits_{i=1}^{n} \tilde{\mathbf{K}}[\sigma_i, \mathbf{j}_i]\ ,$$

$$\tilde{\mathbf{K}}[\sigma_i, \mathbf{j}_i] = \tilde{\mathbf{K}}^0[\sigma_i, \mathbf{j}_i] + \tilde{\mathbf{K}}^1[\sigma_i, \mathbf{j}_i]$$

$$\mathbf{R}_\Sigma[\Sigma, \mathbf{j}] \approx \sum\nolimits_{i=1}^{n} \tilde{\mathbf{R}}[\sigma_i, \mathbf{j}_i],$$

$$\mathbf{R}[\sigma_i, \mathbf{j}_i](\mathbf{x}) \approx \sum\nolimits_{p=1}^{P} \mathbf{R}(\mathbf{j}_i, \mathbf{x}, \mathbf{x}_i^p)\theta_\varepsilon\left(\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^p\right|\right) s_i^p$$

Разложение токов

$$\vec{j}_{1i} = j_{1i}^1 \vec{e}_i^{\,1} + j_{1i}^2 \vec{e}_i^{\,2},\ \vec{j}_{2i} = \vec{j}_{2i}^{\,1} \vec{e}_i^{\,1} + \vec{j}_{2i}^{\,2} \vec{e}_i^{\,2}$$

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

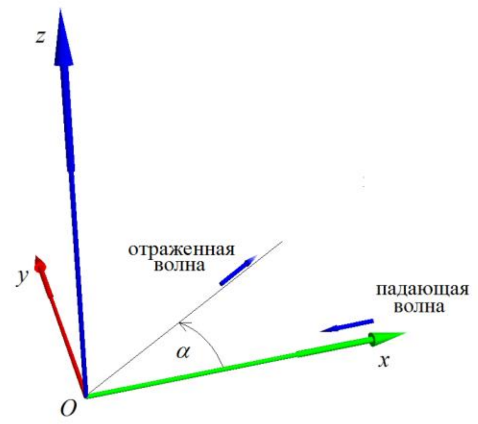
$$\sum_{\substack{J=1,\dots,N \\ l=1,2}} a_{IJ}^{ml} J_J^l = F_I^m,\ I = 1,\dots,N,\ m = 1,2,$$

$$a_{IJ}^{ml} = (\mathbf{A}_{IJ} \vec{e}_j^{\,l}, \vec{e}_i^{\,m}),\quad F_I^m = \left(\vec{F}_I, \vec{e}_i^{\,m}\right),$$

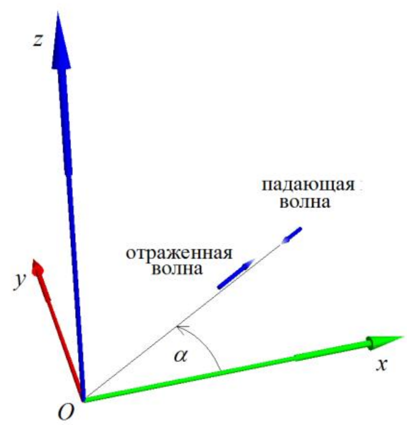
$$\mathbf{A}_{IJ} \vec{J} = \alpha\, \vec{n}_i \times G\left[\sigma_j, \vec{J}\right](x^i) + \beta\,{}_i^j \vec{J},\ i = i(I),\ j = j(J),\ G = \tilde{\mathbf{K}} \text{ или } G = \tilde{\mathbf{R}}.$$

$$\vec{F}_I = -\sum_{J=1,\dots,N} \mathbf{A}_{IJ}^{ent} \vec{J}_J^{inc} - \gamma \delta_m^1 \vec{n} \times \vec{E}_{inc},\ \mathbf{A}_{IJ}^{inc} \vec{J}_J^{inc} = \alpha^{inc}\, \vec{n}_i \times G^{inc}\left[\sigma_j, \vec{J}_J^{inc}\right](x^i) + \beta\,{}_i^j \vec{J}_J^{inc},\ G^{inc} = \tilde{\mathbf{K}} \text{ или } G^{inc} = \tilde{\mathbf{R}}.$$

ДИАГРАММЫ РАССЕЯНИЯ



для диаграммы прямого рассеяния



для диаграммы обратного рассеяния

ω - частота (круговая [рад/с])

$\tilde{\omega} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ - частота в [Гц],

$k = \dfrac{2\pi\tilde{\omega}}{c}$ - волновое число [1/м]

c - скорость света [м/с]

$\lambda = \dfrac{c}{\tilde{\omega}}$ длина волны [м]

Эффективная поверхность рассеяния (ЭПР) в направлении вектора $\vec{\tau}$:

$$\sigma(\alpha) = \lim_{R\to\infty} 4\pi R^2 \frac{\left|\vec{E}(R\vec{\tau})\right|^2}{\left|\vec{E}_{inc}\right|^2} \text{ - [м*м]},$$

Эффективная поверхность рассеяния в децибеллах

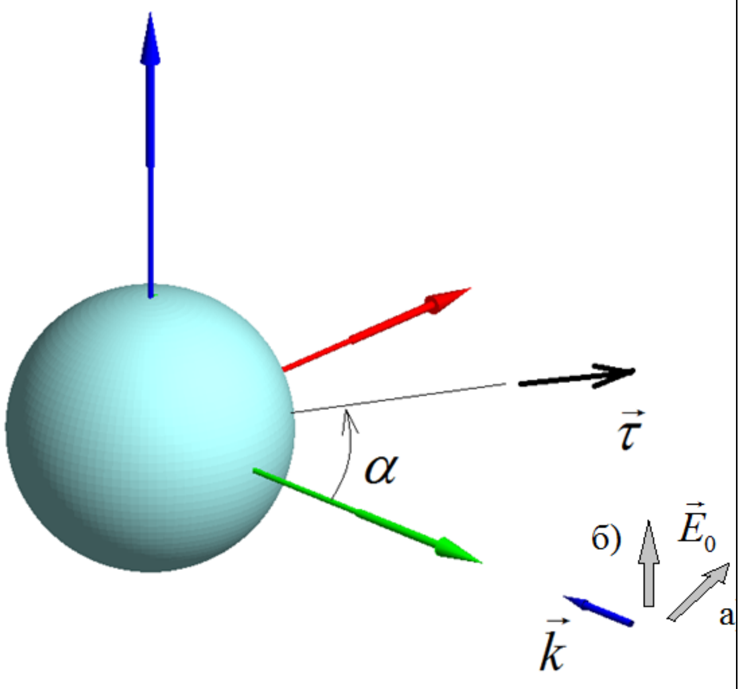
$$10\lg\sigma(\alpha) \text{ - [дБ(м*м)]}$$

Выражение для ЭПР через поверхностные токи на внешней поверхности Σ_1:

$$\sigma(\vec{\tau}) = \frac{4\pi}{\left|\vec{E}_{ent}\right|^2}\left|\int_{\Sigma_1} e^{-ik(\vec{\tau},y)}\left[\frac{i}{\omega\varepsilon_1}k^2\left(\vec{j}_E - \vec{\tau}\left(\vec{j}_E,\vec{\tau}\right)\right) + ik\left[\vec{\tau}\times\vec{j}_M(y)\right]\right]d\sigma_y\right|^2$$

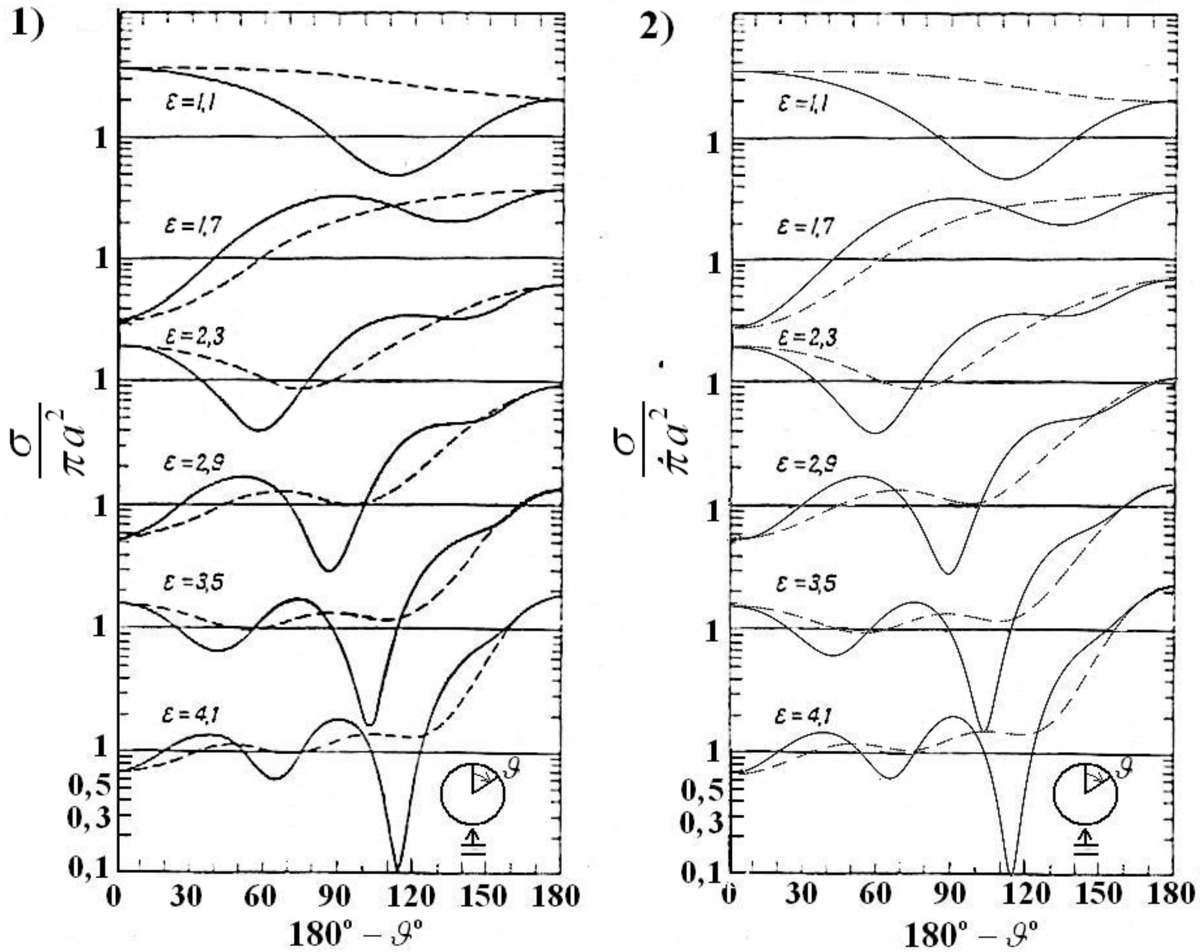
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЕ



а) ----- - горизонтальная поляризация

б) ▬▬ - вертикальная поляризация



1) теория **2) расчет**

$\varepsilon = kr$, r **- радиус сферы**

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩЕМ ЦИЛИНДРЕ

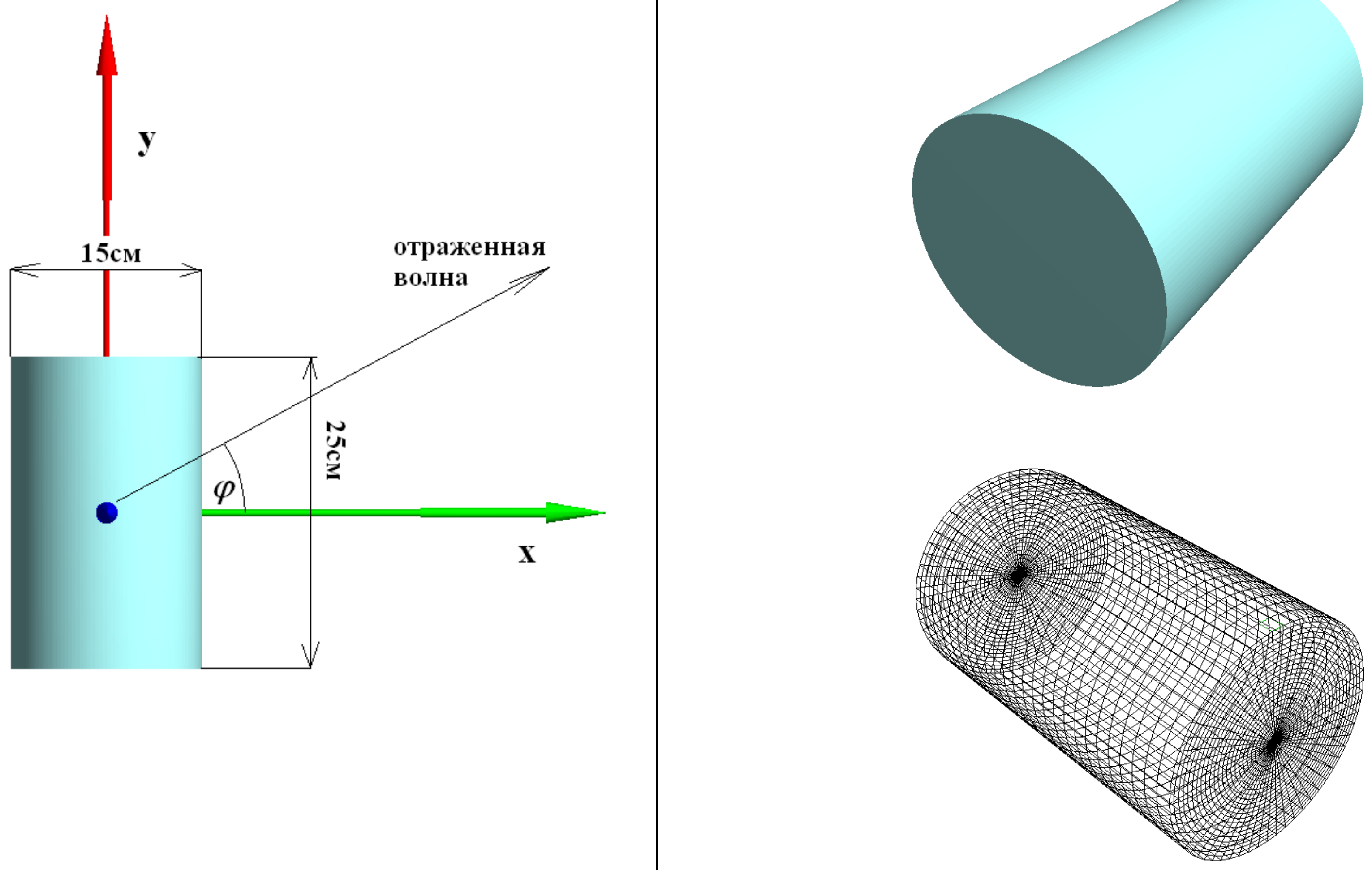
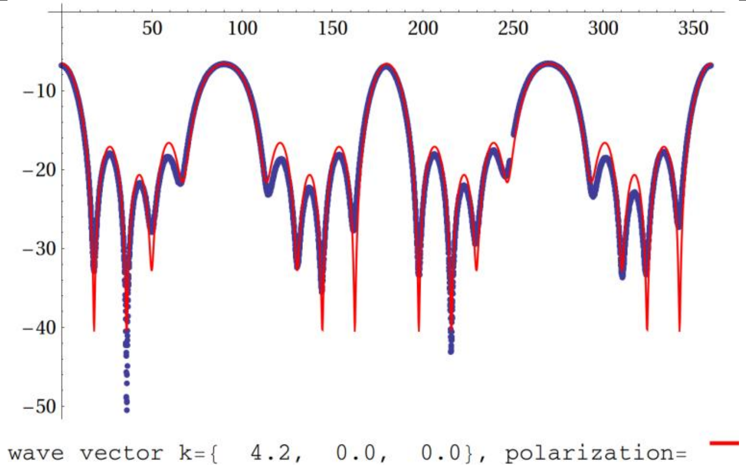


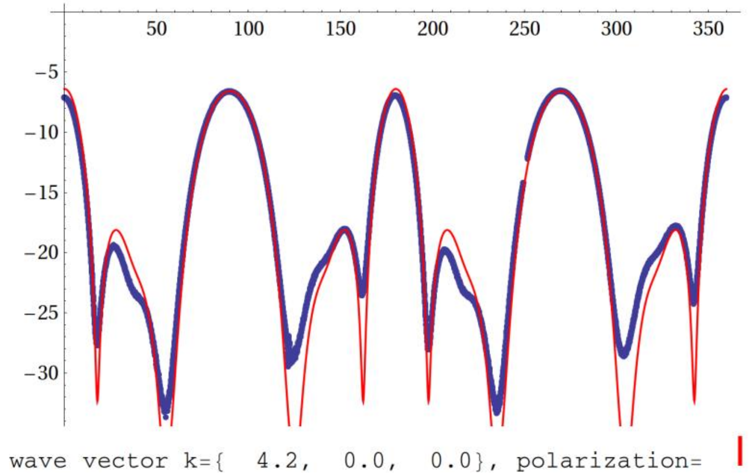
Схема эксперимента.

ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Частота 2ГГц ($\lambda = 15{,}0$ см), красный - расчет, синий - эксперимент (ИТПЭ РАН)

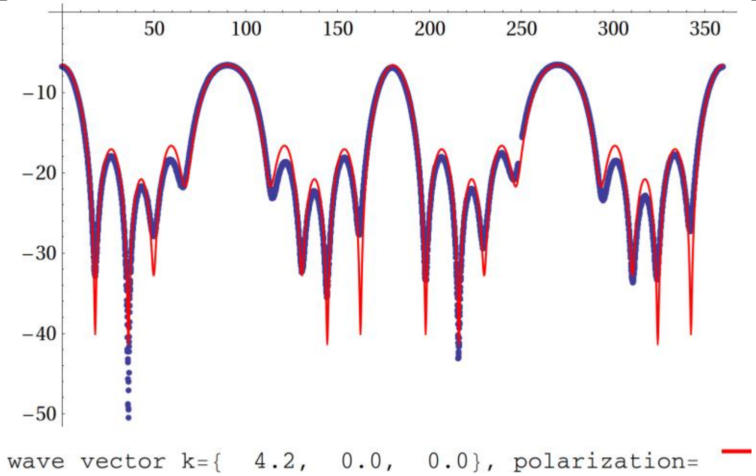


а) горизонтальное направление вектора поляризации

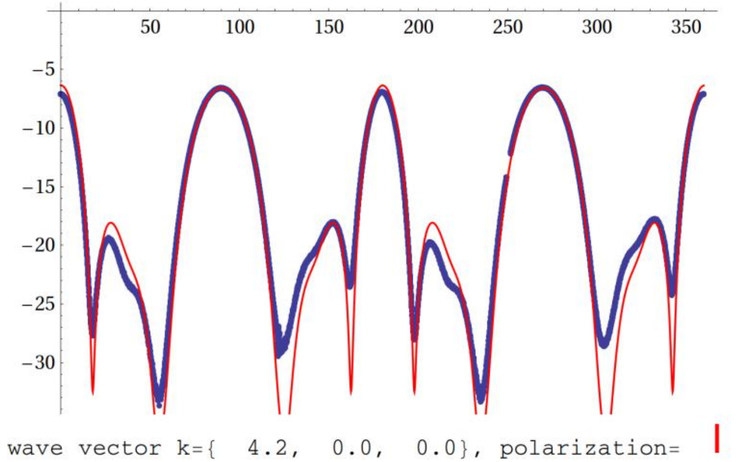


б) вертикальное направление вектора поляризации

ЭПР при частоте 2 ГГц, разбиенина 3300 ячеек (максимальный размер ячейки 1 см.)



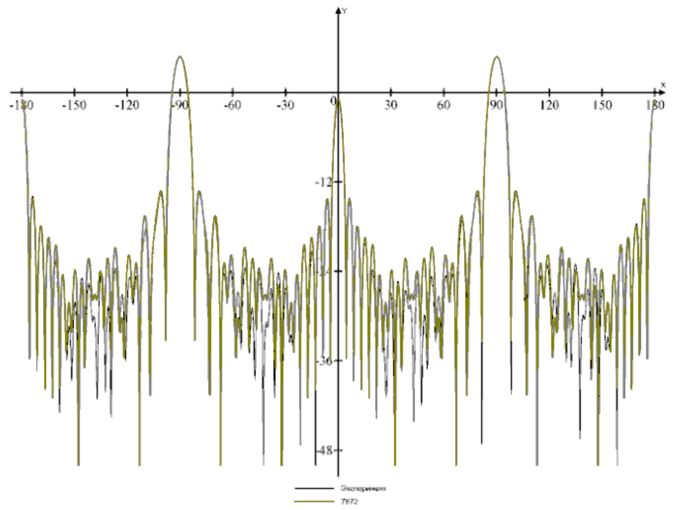
а) горизонтальное направление вектора поляризации



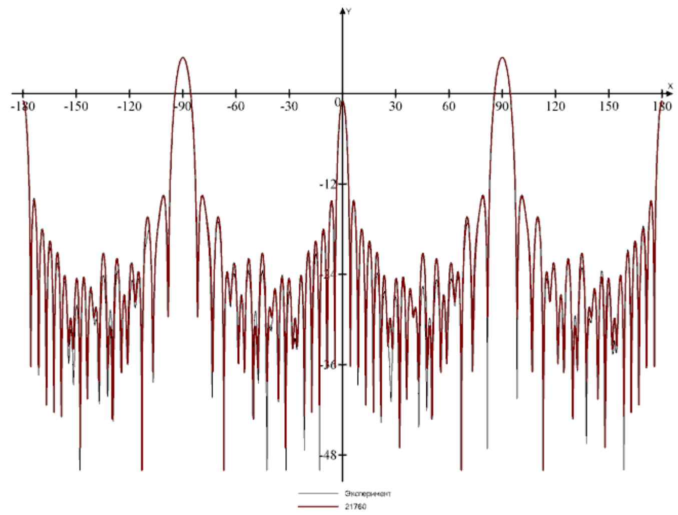
б) вертикальное направление вектора поляризации

ЭПР при частоте 2 ГГц, разбиение на 11000 ячеек (максимальный размер ячейки 0.5 см.)

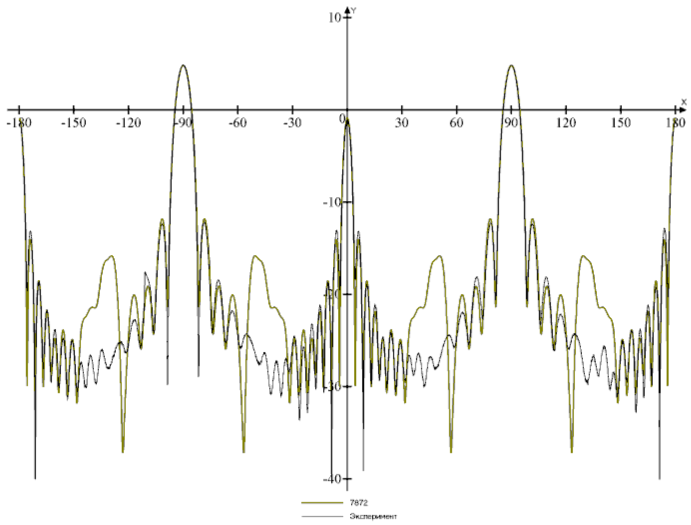
частота 8 ГГц - $\lambda = 3,75$см;



а) горизонтальное направление вектора поляризации



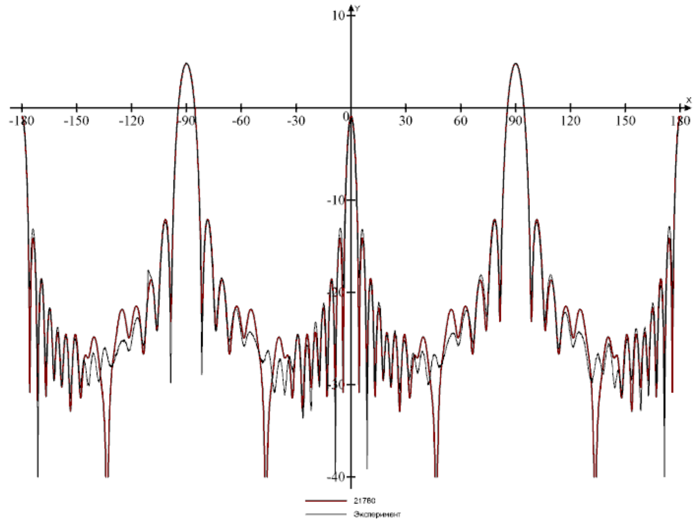
а) горизонтальное направление вектора поляризации



б) вертикальное направление вектора поляризации

ЭПР при частоте 8 ГГц, разбиение на 11000 ячеек

(максимальный размер ячейки 0,5 см.)

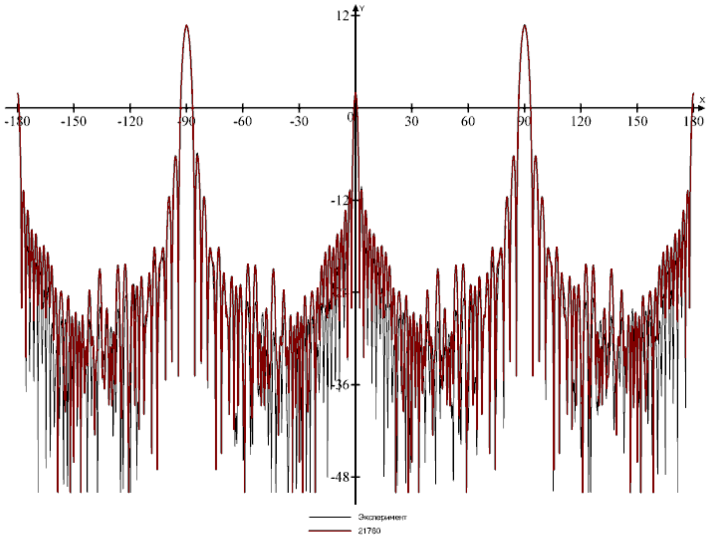


б) вертикальное направление вектора поляризации

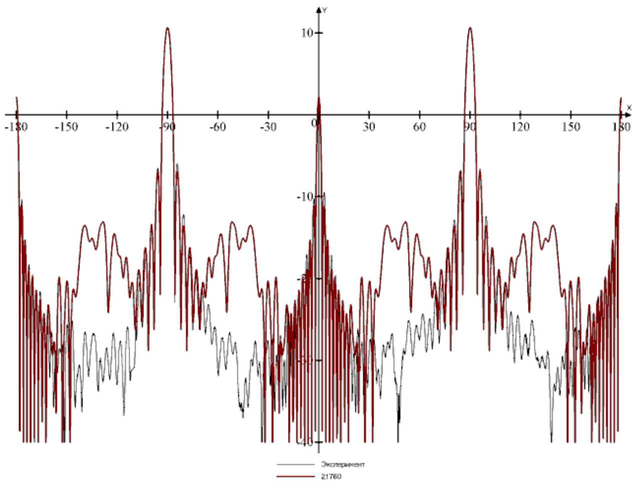
ЭПР при частоте 8 ГГц, разбиение на 21760 ячеек

(максимальный размер ячейки 0,3 см.)

частота 16 ГГц - $\lambda = 1{,}875$ см;

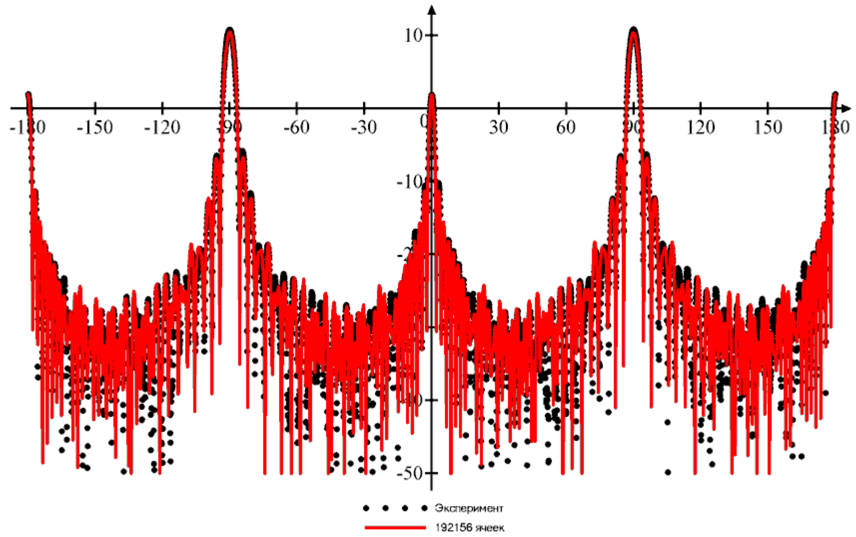


а) горизонтальное направление вектора поляризации

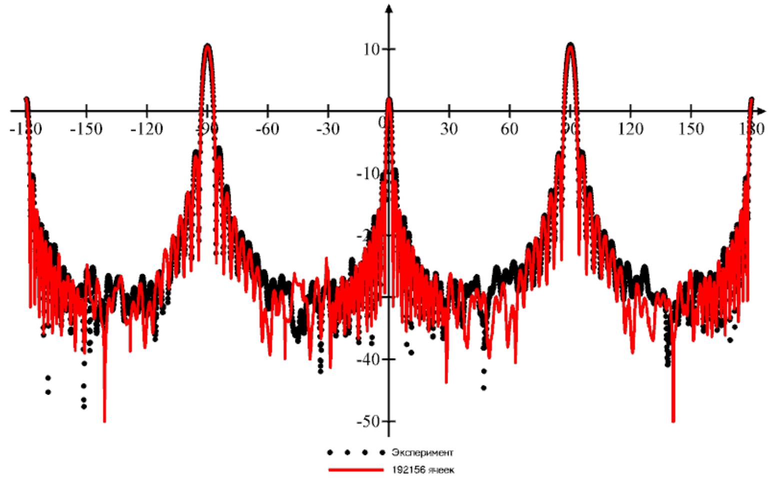


б) вертикальное направление вектора поляризации

ЭПР при частоте 16 ГГц, разбиение на 21760 ячеек (максимальный размер ячейки 0,3 см.)



а) горизонтальное направление вектора поляризации

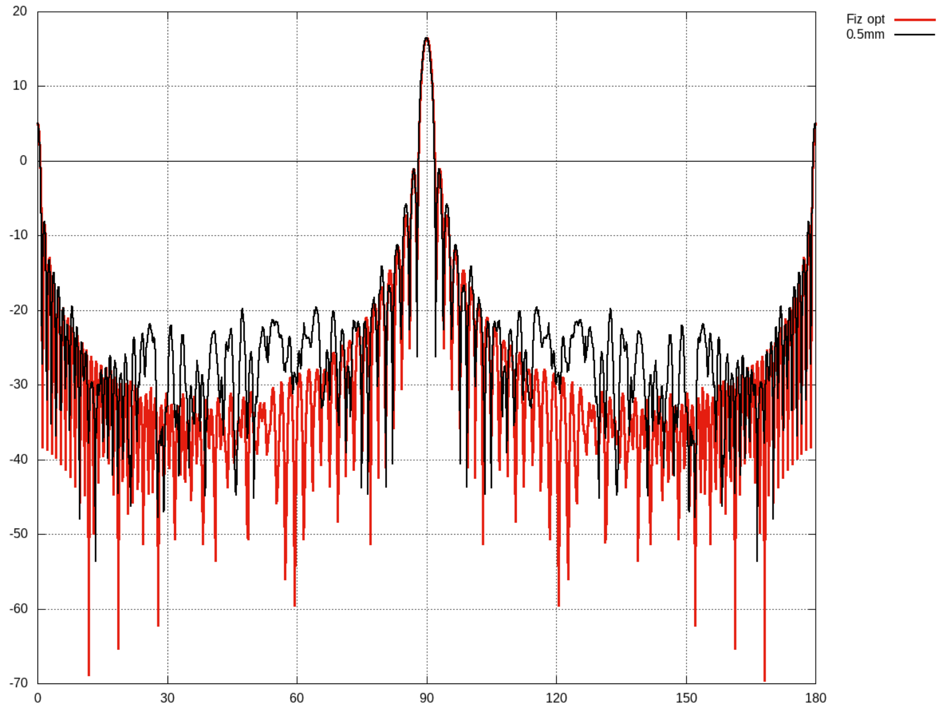


б) вертикальное направление вектора поляризации

ЭПР при частоте 16 ГГц, разбиение на 192156 ячеек (максимальный размер ячейки 0,1 см.)

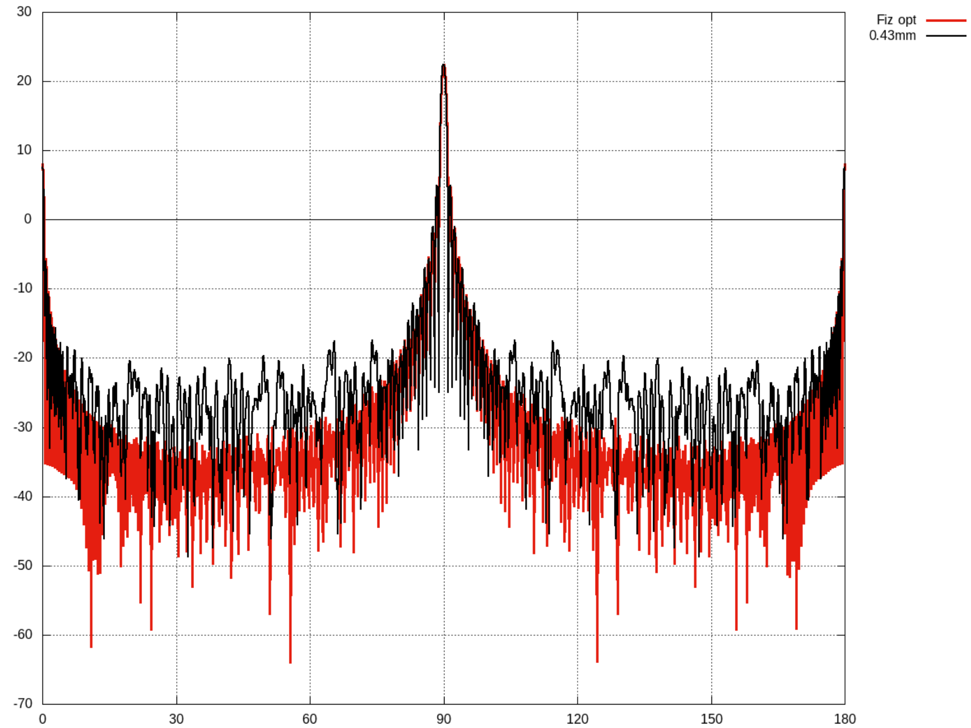
красный - расчет физ-оптика, черный - расчет по методу интегральных уравнений

частота 32 ГГц - $\lambda = 0{,}94$ **см;**



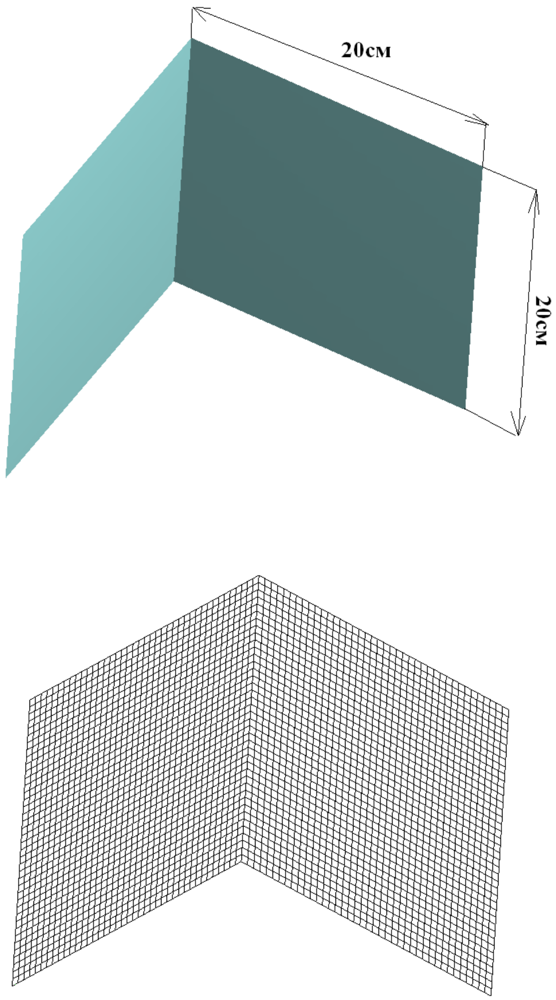
горизонтальное направление вектора поляризации ЭПР при частоте 32 ГГц, разбиение на 1 507 200 ячеек (максимальный размер ячейки 0,5 мм.)

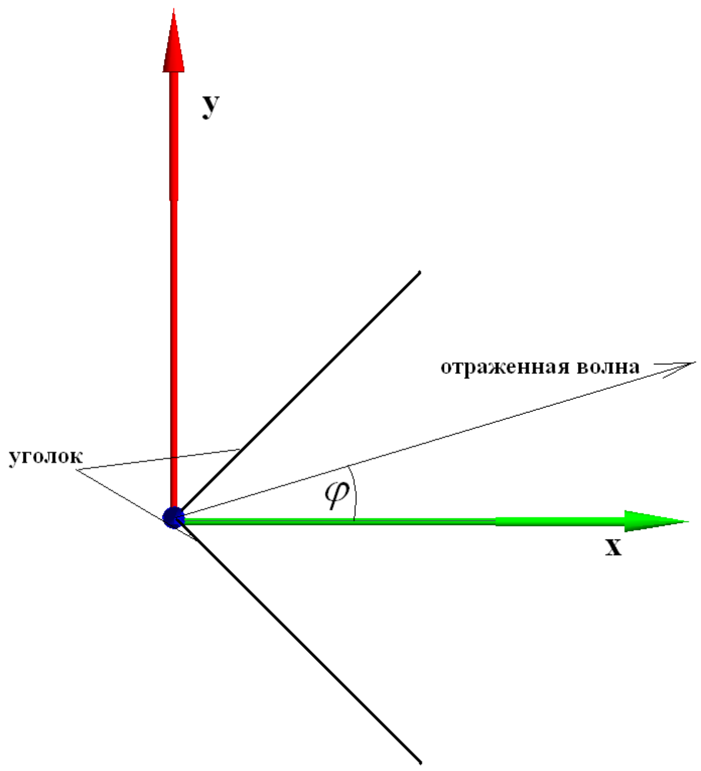
частота 64 ГГц - $\lambda = 0{,}47$ **см**



горизонтальное направление вектора поляризации ЭПР при частоте 64 ГГц, разбиение на 2 006 928 ячеек (максимальный размер ячейки 0,4 мм.)

РАСЧЕТ ЭПР УГОЛКОВОГО ОТРАЖАТЕЛЯ

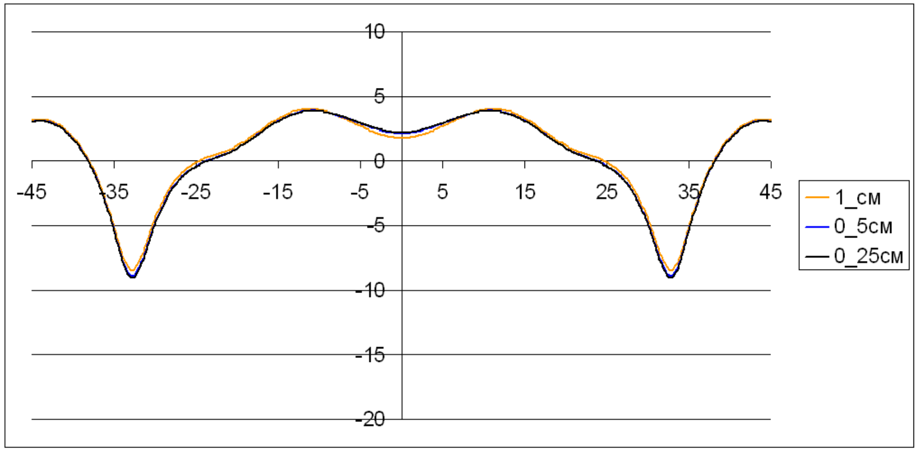




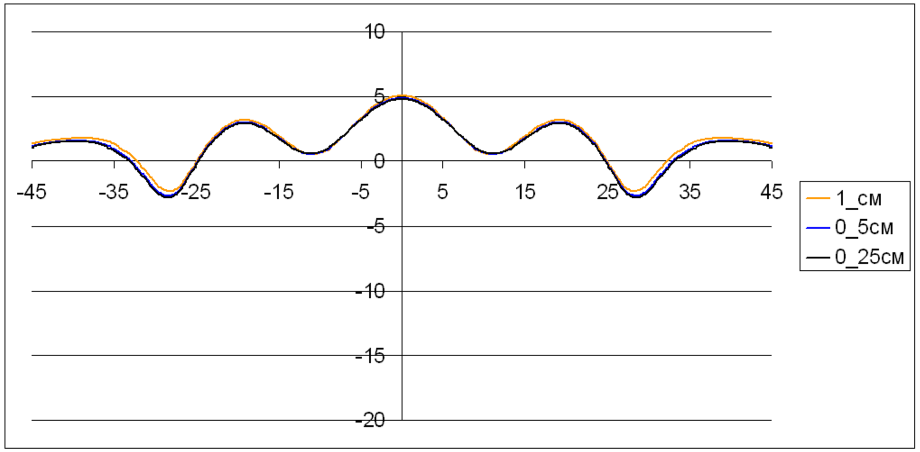
вид сверху

РАСЧЕТ ПРИ РАЗНОЙ ГУСТОТЕ СЕТКИ РАЗБИЕНИЯ

3ГГц ($\lambda = 10$ см)

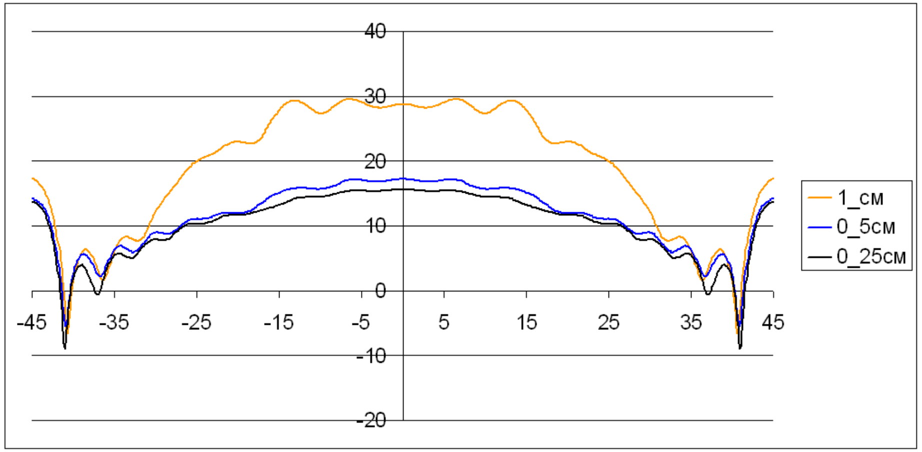


а) горизонтальное направление вектора поляризации

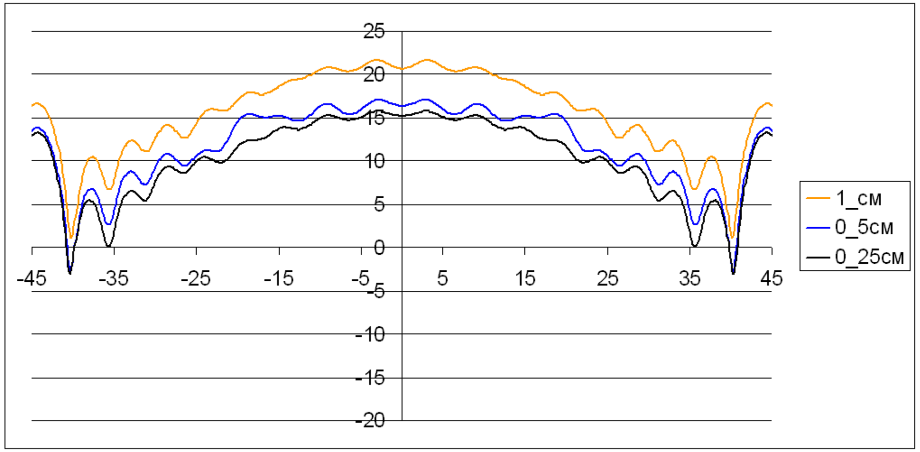


б) вертикальное направление вектора поляризации

10ГГц ($\lambda = 3$ см)



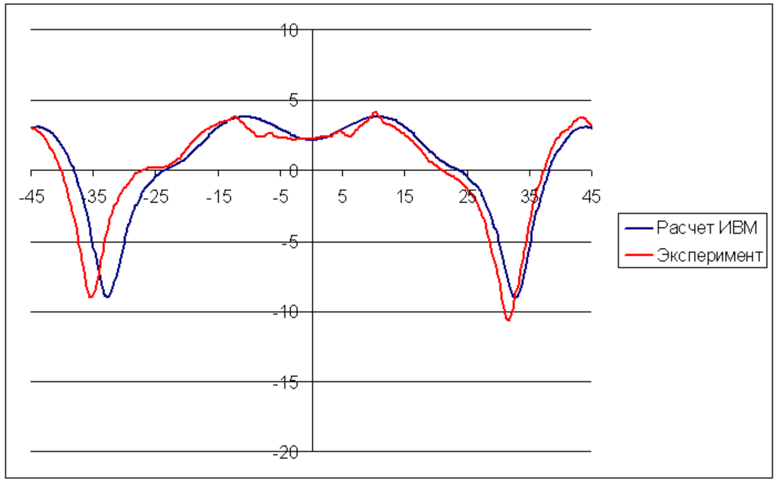
а) горизонтальное направление вектора поляризации



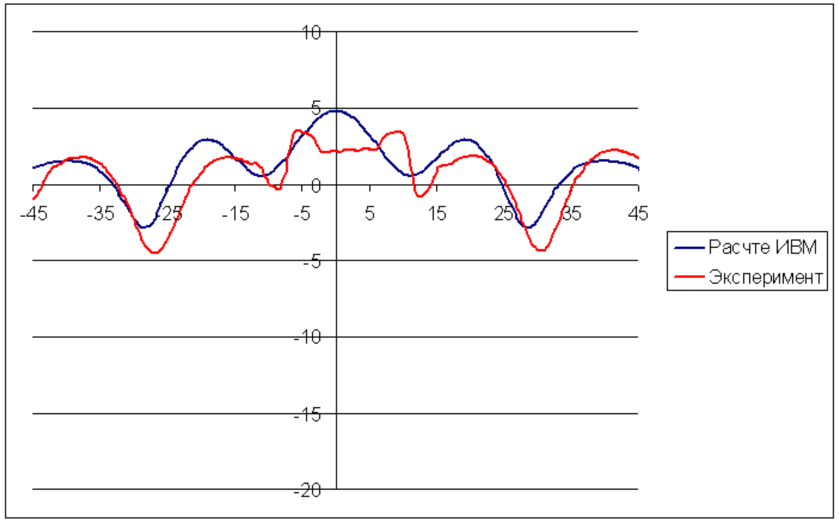
б) вертикальное направление вектора поляризации

СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ (ЭКСПЕРИМЕНТ ИТПЭ РАН)

3ГГц ($\lambda = 10$ см)

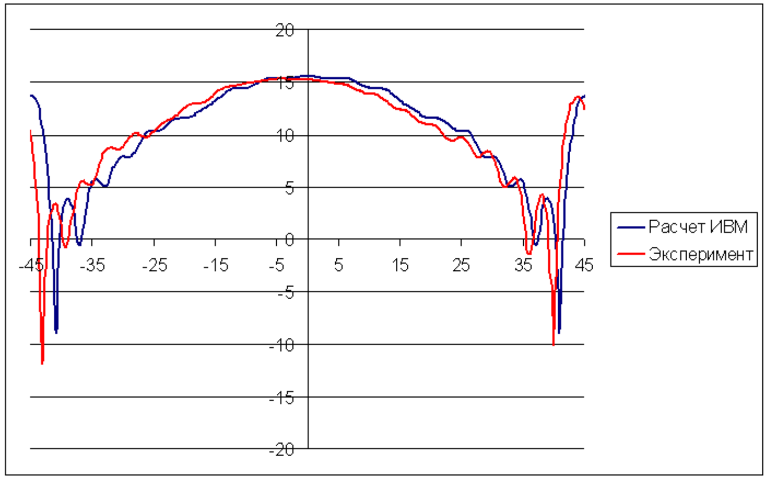


а) горизонтальное направление вектора поляризации

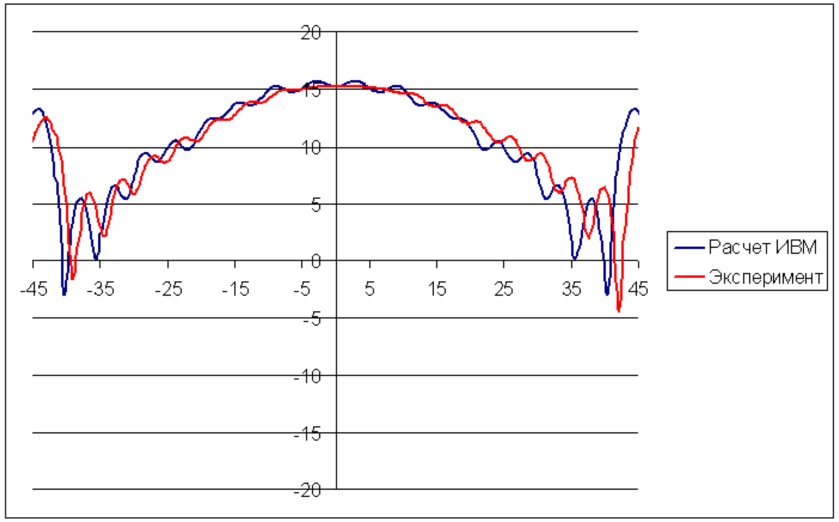


б) вертикальное направление вектора поляризации

10ГГц ($\lambda = 3$ см)



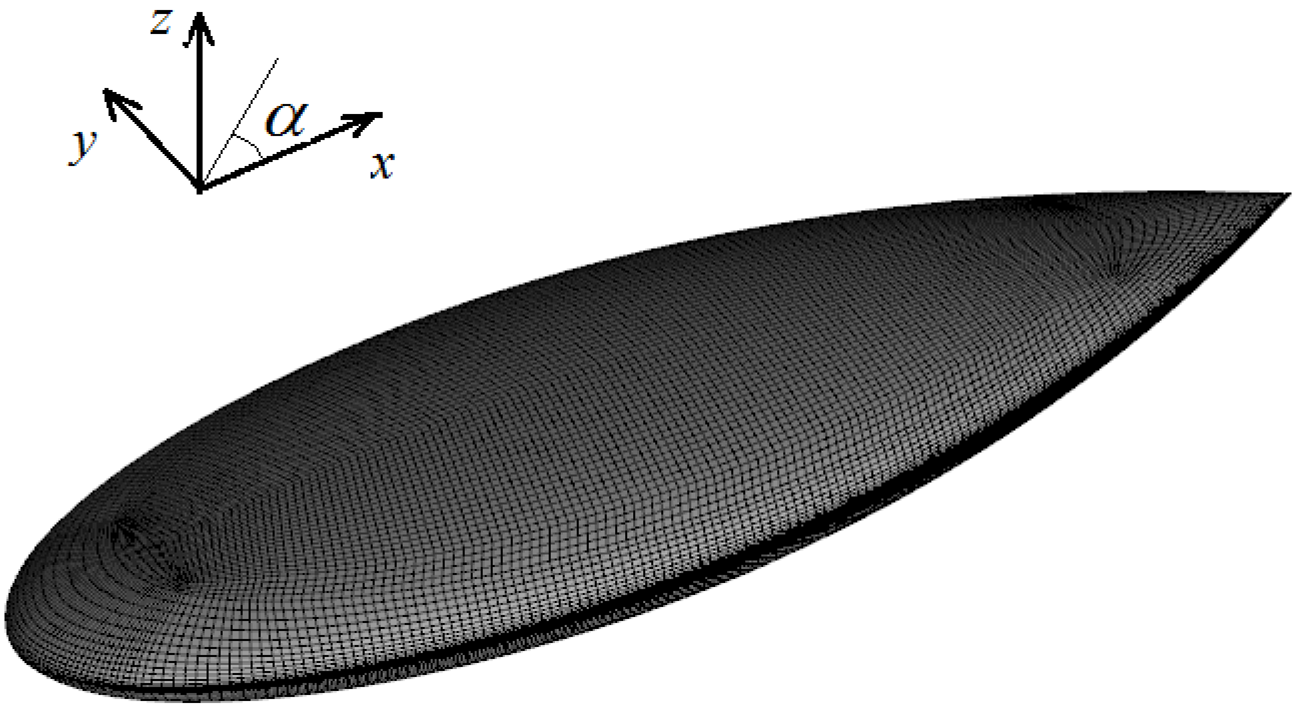
а) горизонтальное направление вектора поляризации

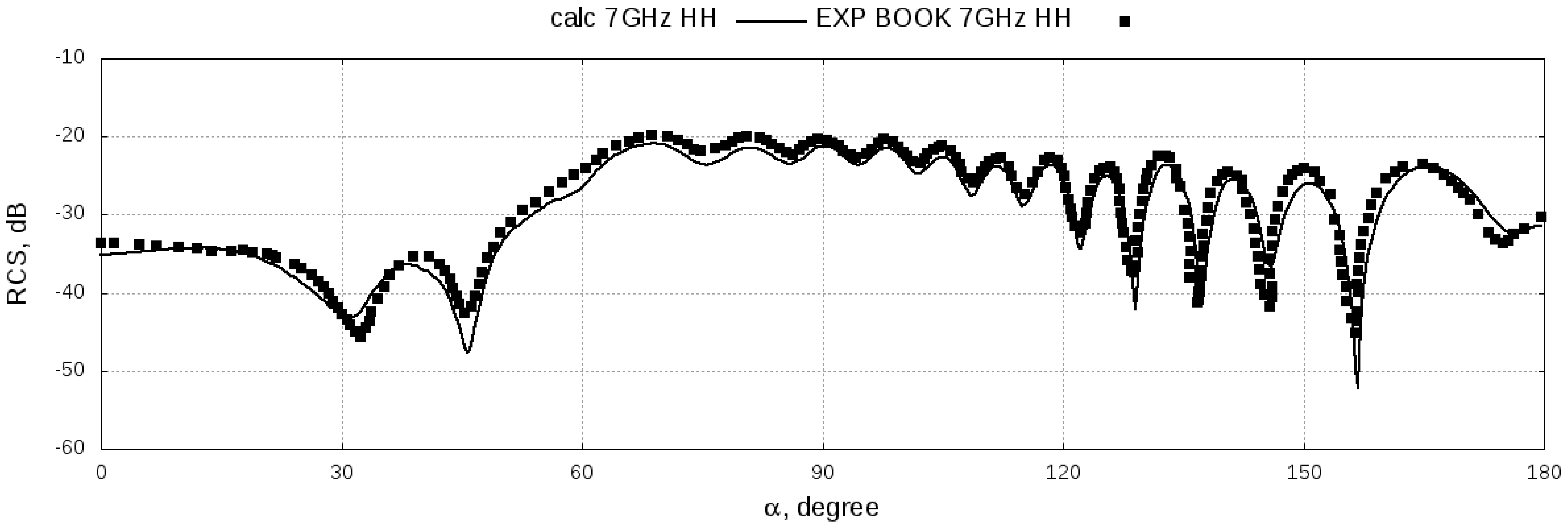


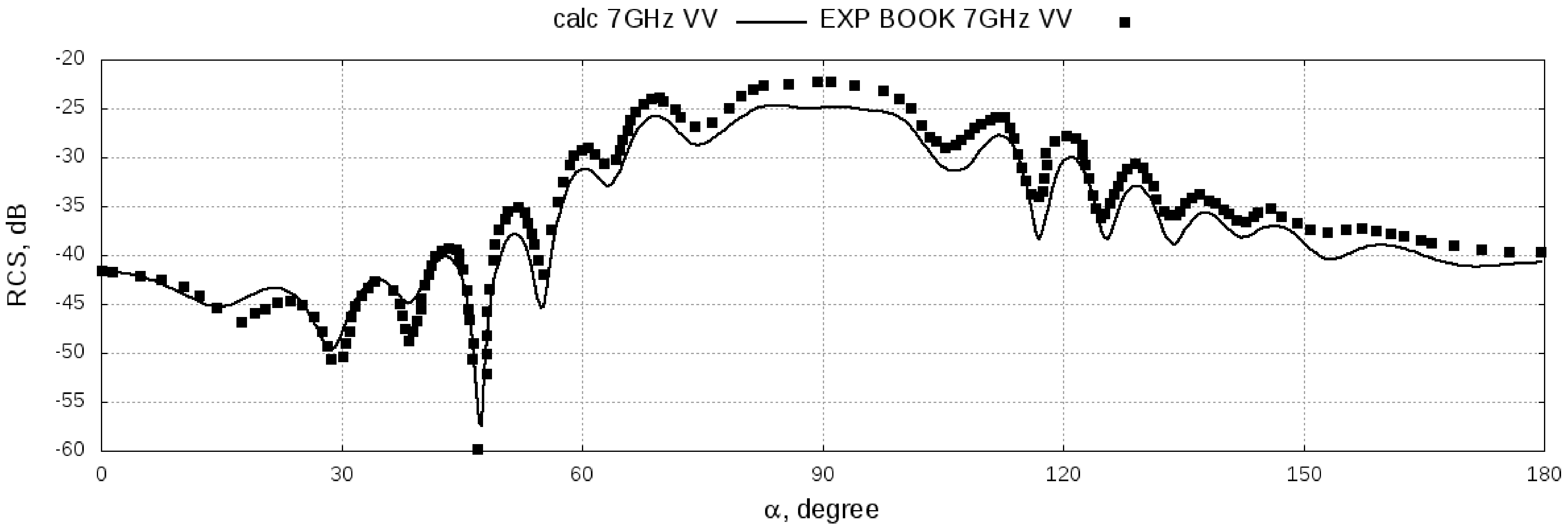
б) вертикальное направление вектора поляризации

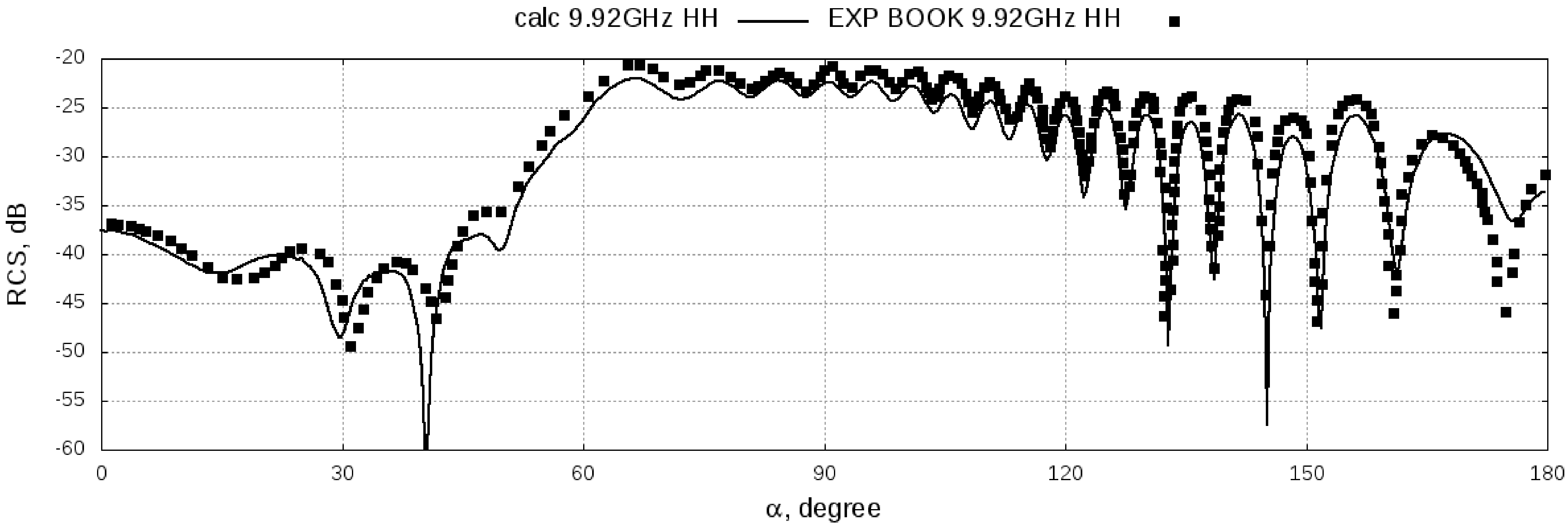
ДИАГРАММА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ "АЛМОИДА"

(ALMOND NASA)

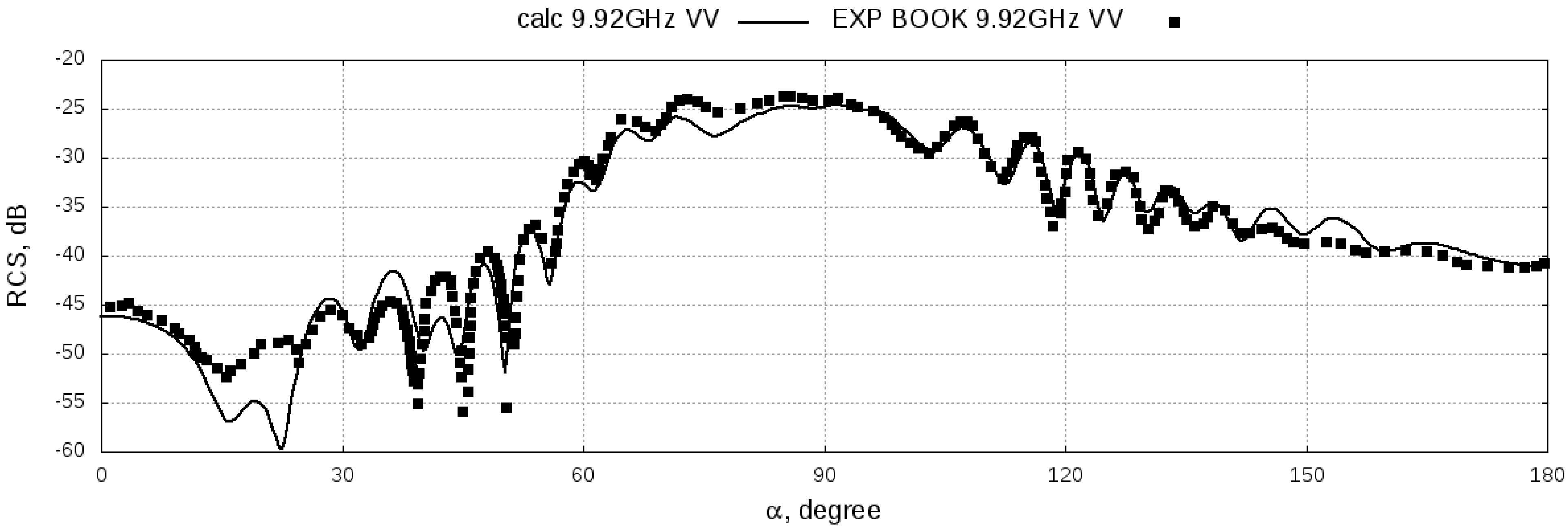



calc 7GHz HH
EXP BOOK 7GHz HH
RCS, dB
α, degree


calc 7GHz VV
EXP BOOK 7GHz VV
RCS, dB
α, degree



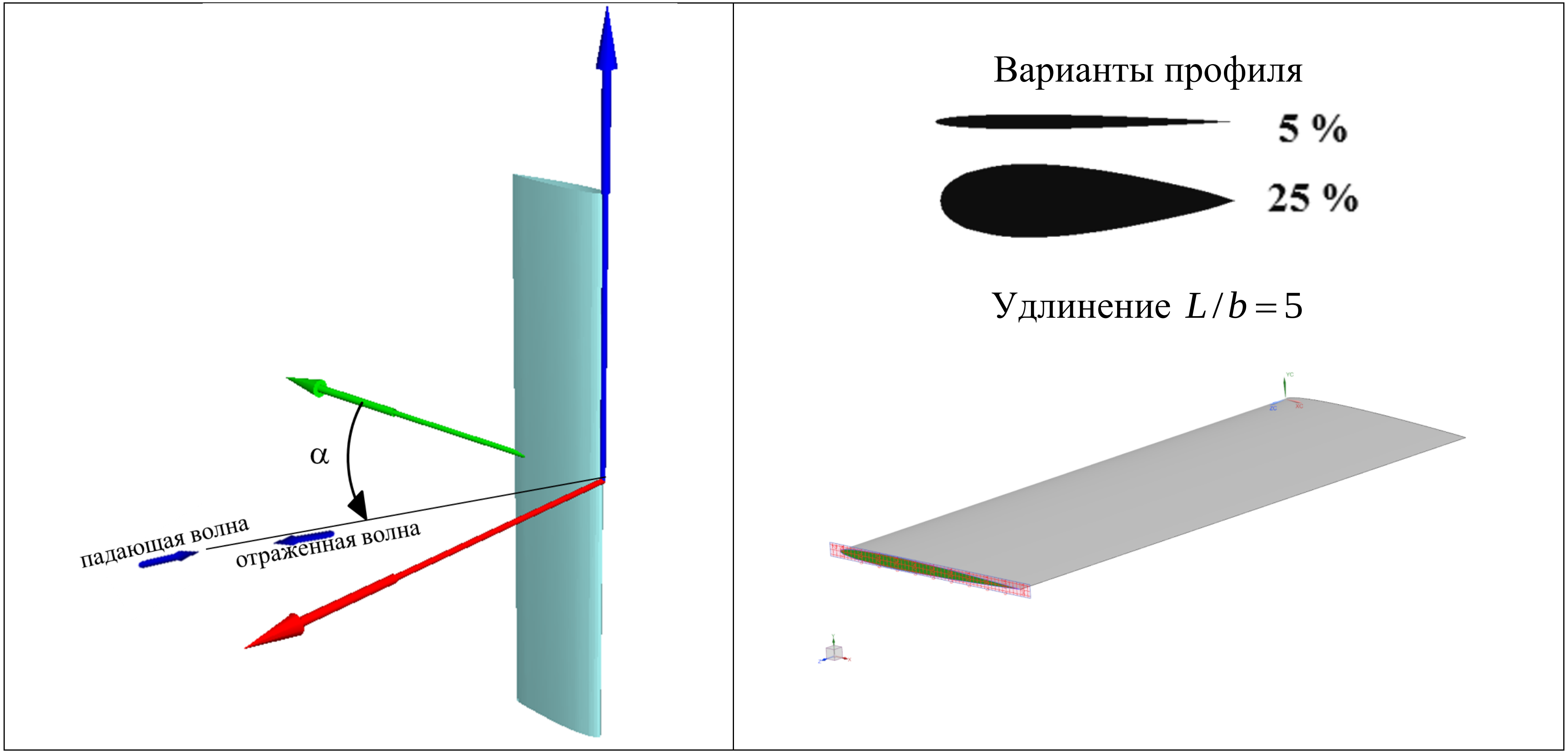
calc 9.92GHz HH
EXP BOOK 9.92GHz HH
RCS, dB
α, degree
-20
-25
-30
-35
-40
-45
-50
-55
-60
0
30
60
90
120
150
180



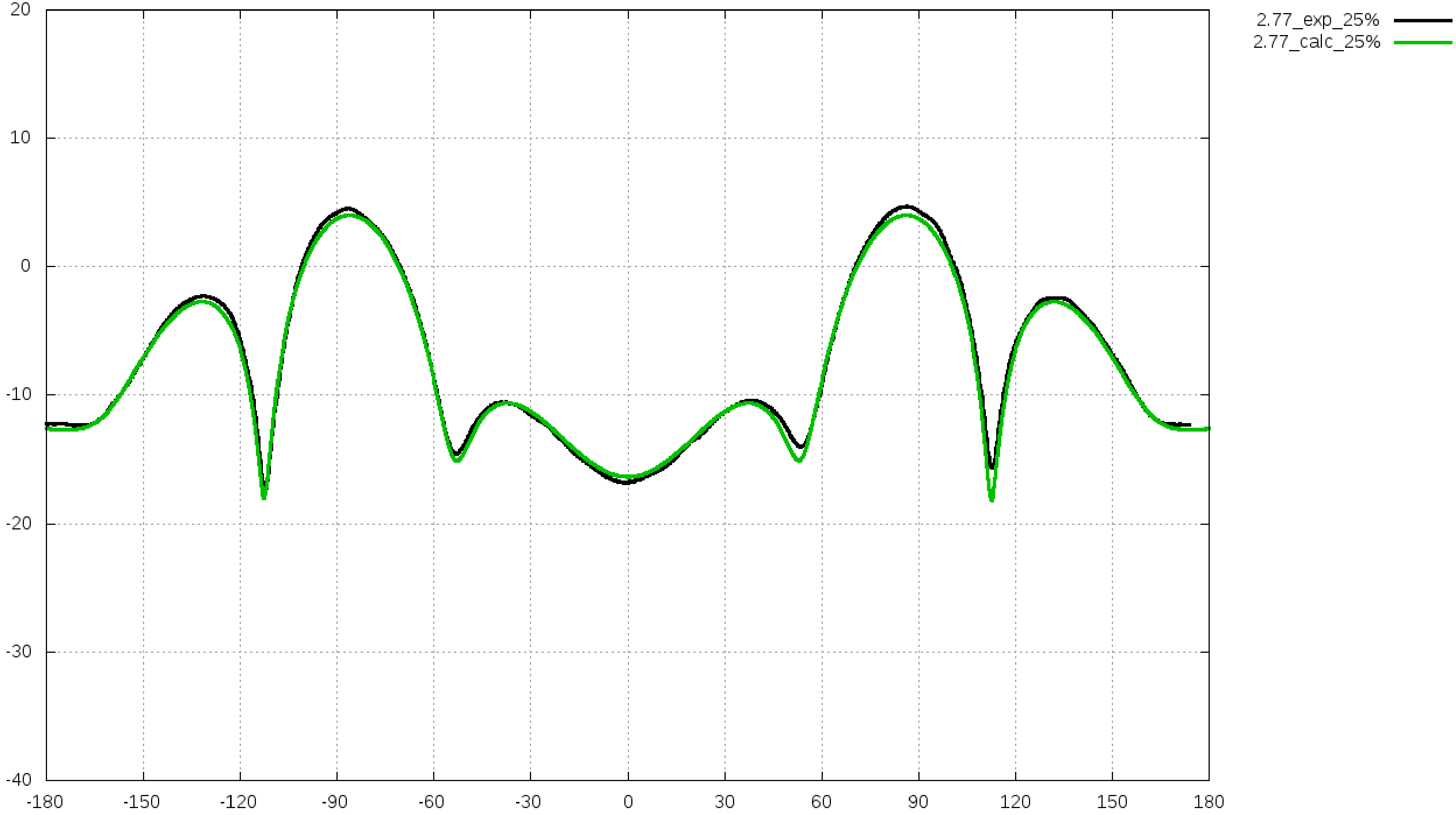
calc 9.92GHz VV
EXP BOOK 9.92GHz VV
RCS, dB
α, degree
-20
-25
-30
-35
-40
-45
-50
-55
-60
0
30
60
90
120
150
180

ДИАГРАММА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ КРЫЛА

Сравнение с экспериментальными данными
крыло, удлинение 5, профиль NACA-0012 (с вариацией толщины)

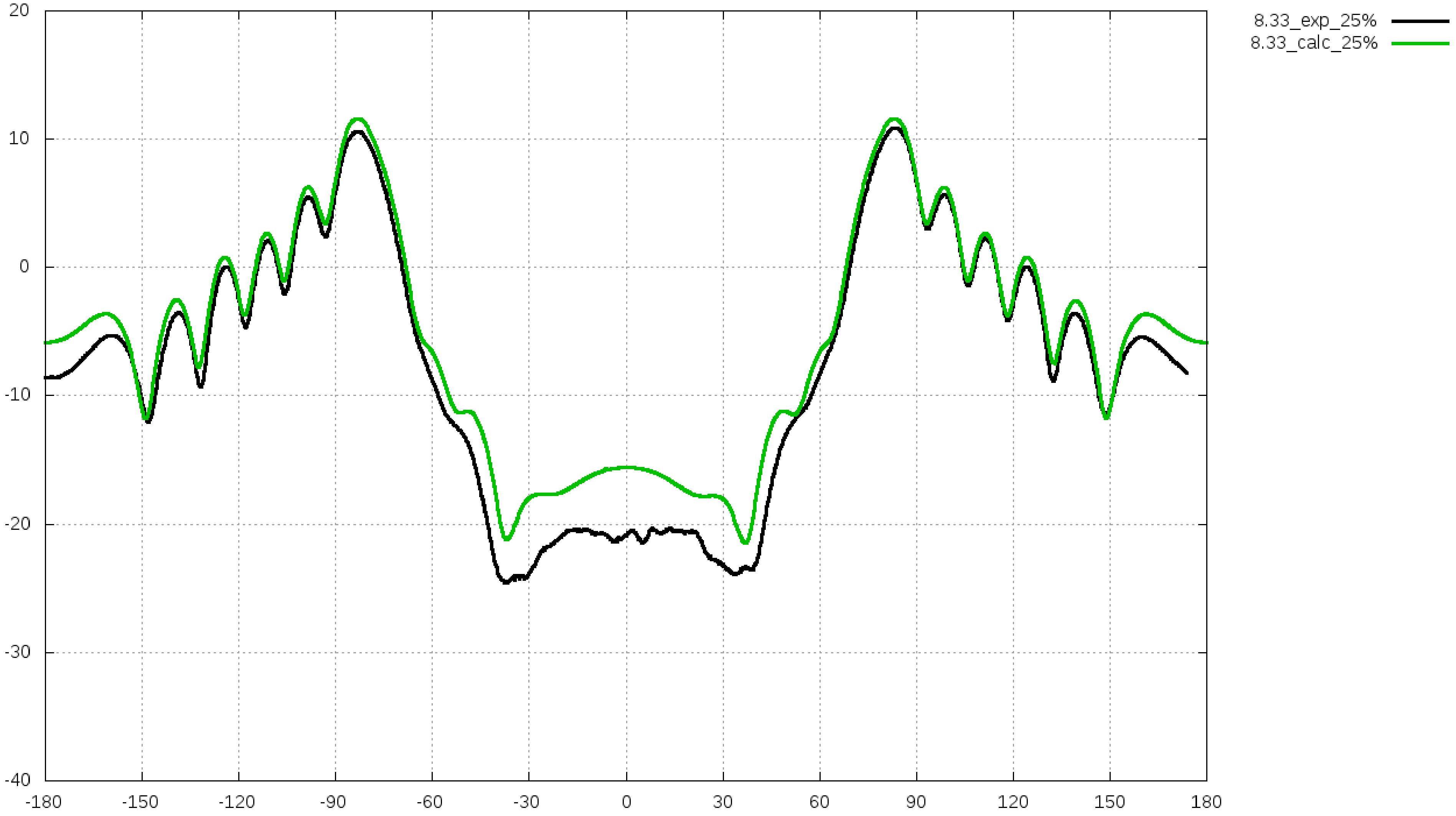


красный - расчет, черный - эксперимент (ИТПЭ РАН)



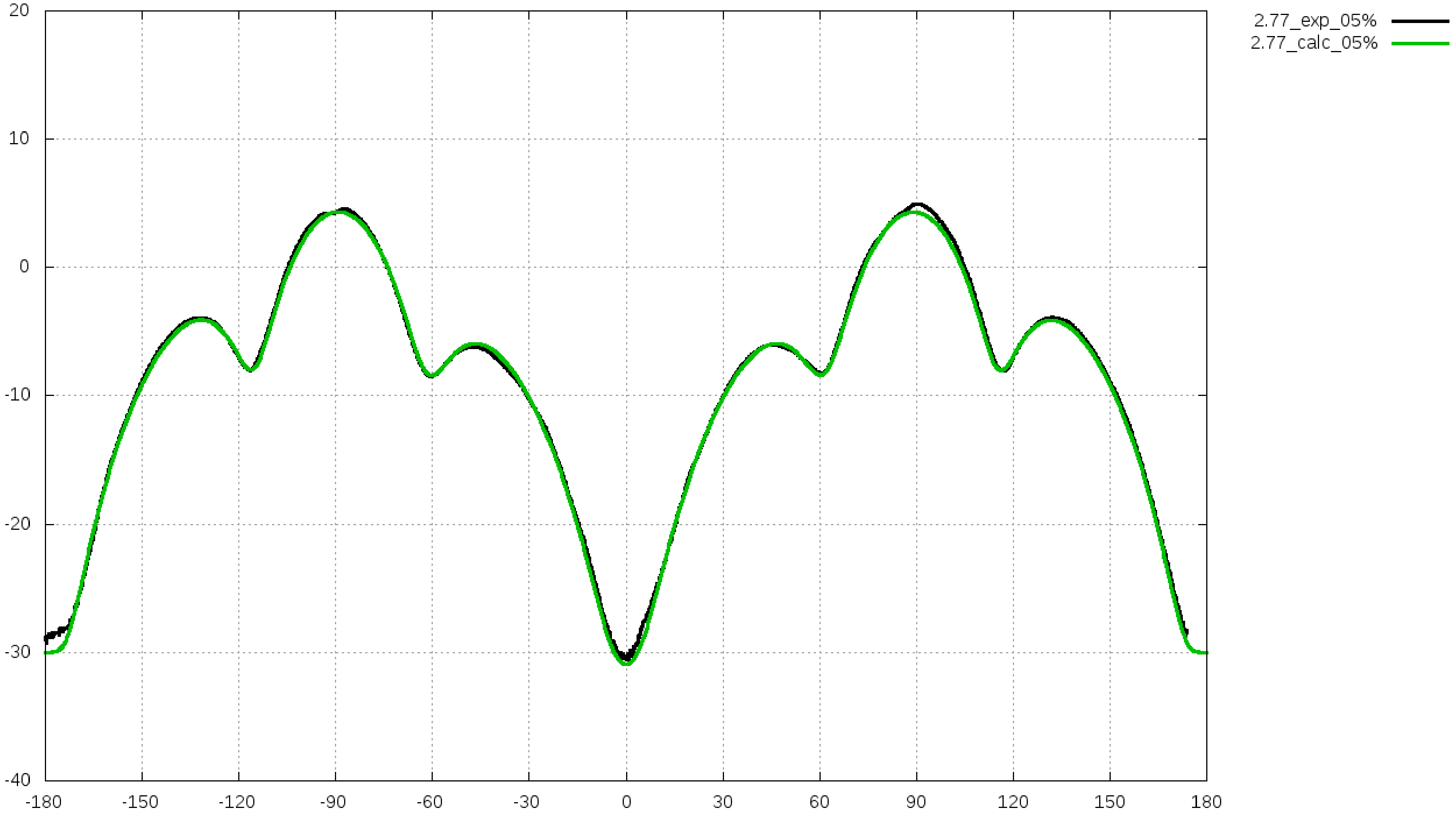
2.77 ГГц, горизонтальная поляризация, С-25%

красный - расчет, черный - эксперимент (ИТПЭ РАН)



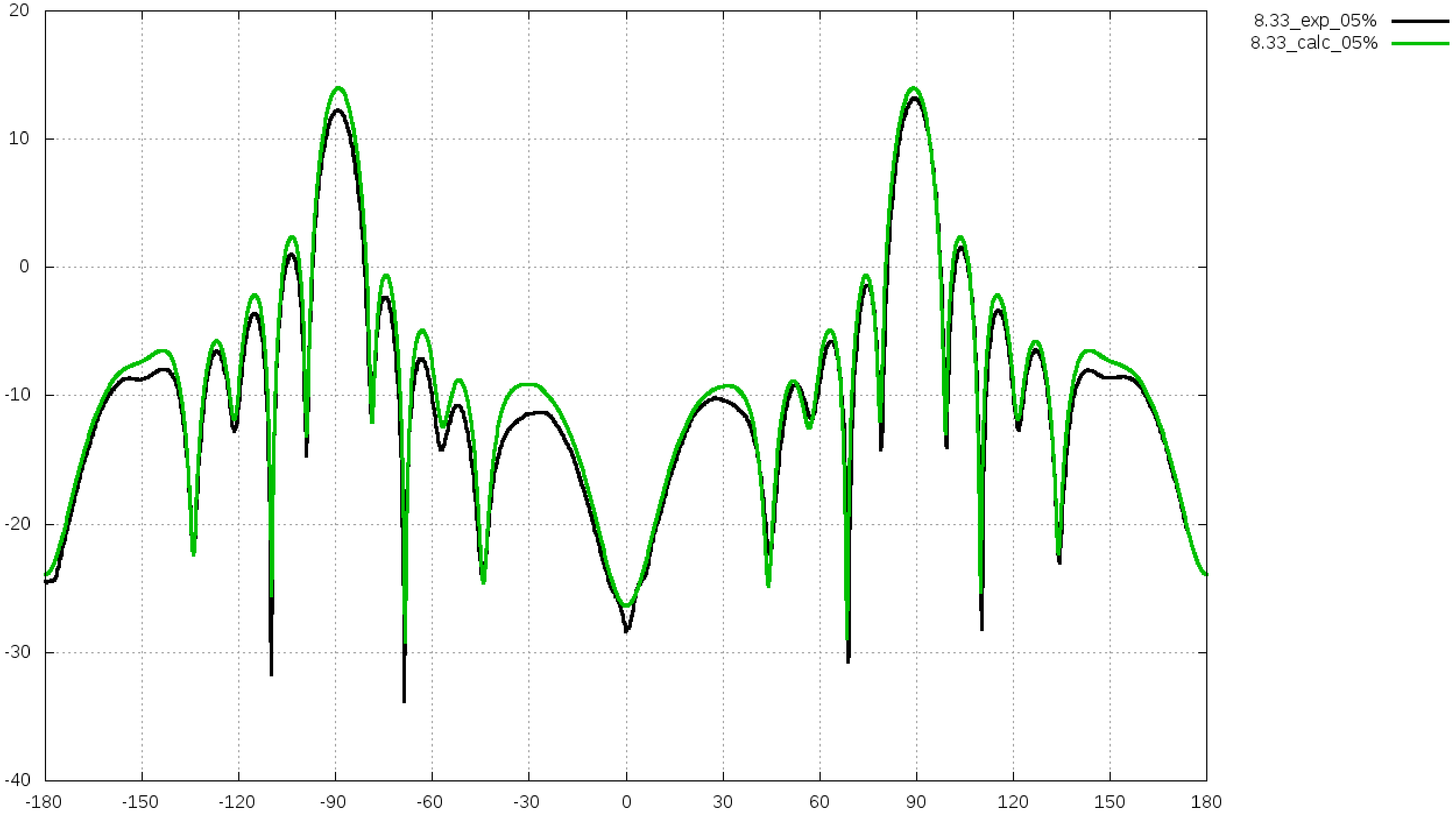
8.33 ГГц, горизонтальная поляризация, С-25%

красный - расчет, черный - эксперимент (ИТПЭ РАН)



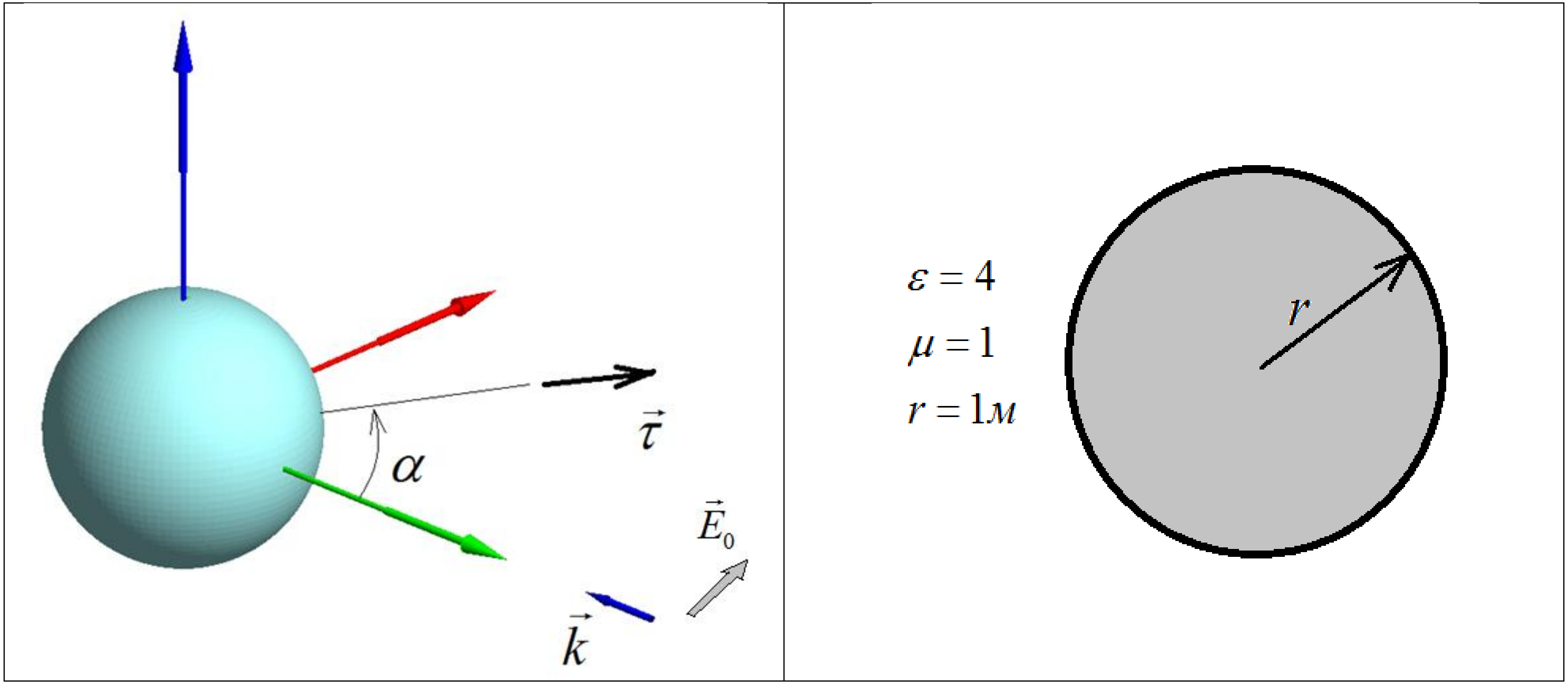
2.77 ГГц, горизонтальная поляризация, С-5%

красный - расчет, черный - эксперимент (ИТПЭ РАН)



8.33 ГГц, горизонтальная поляризация, С-5%

РАССЕЯНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СФЕРОЙ



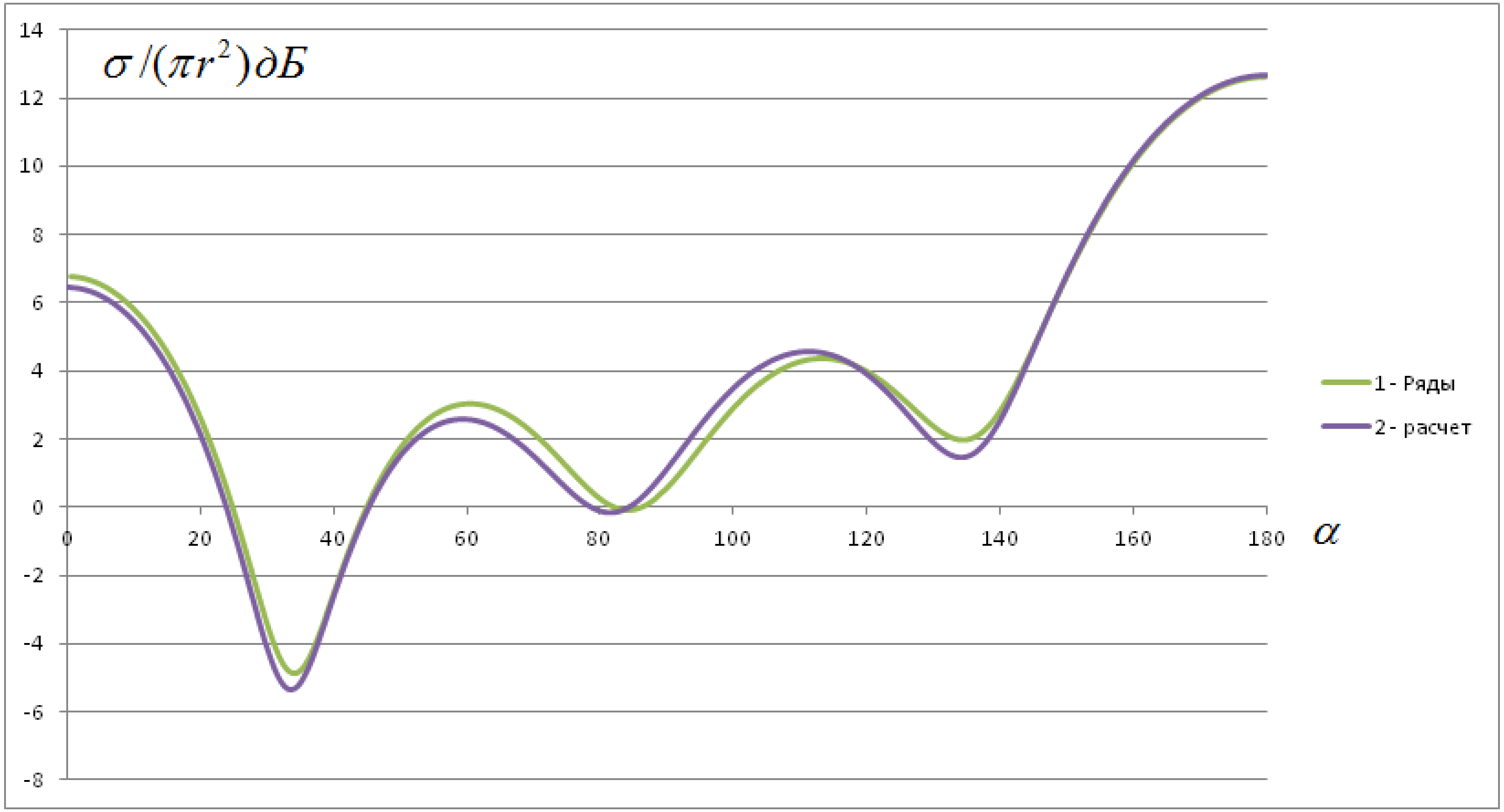
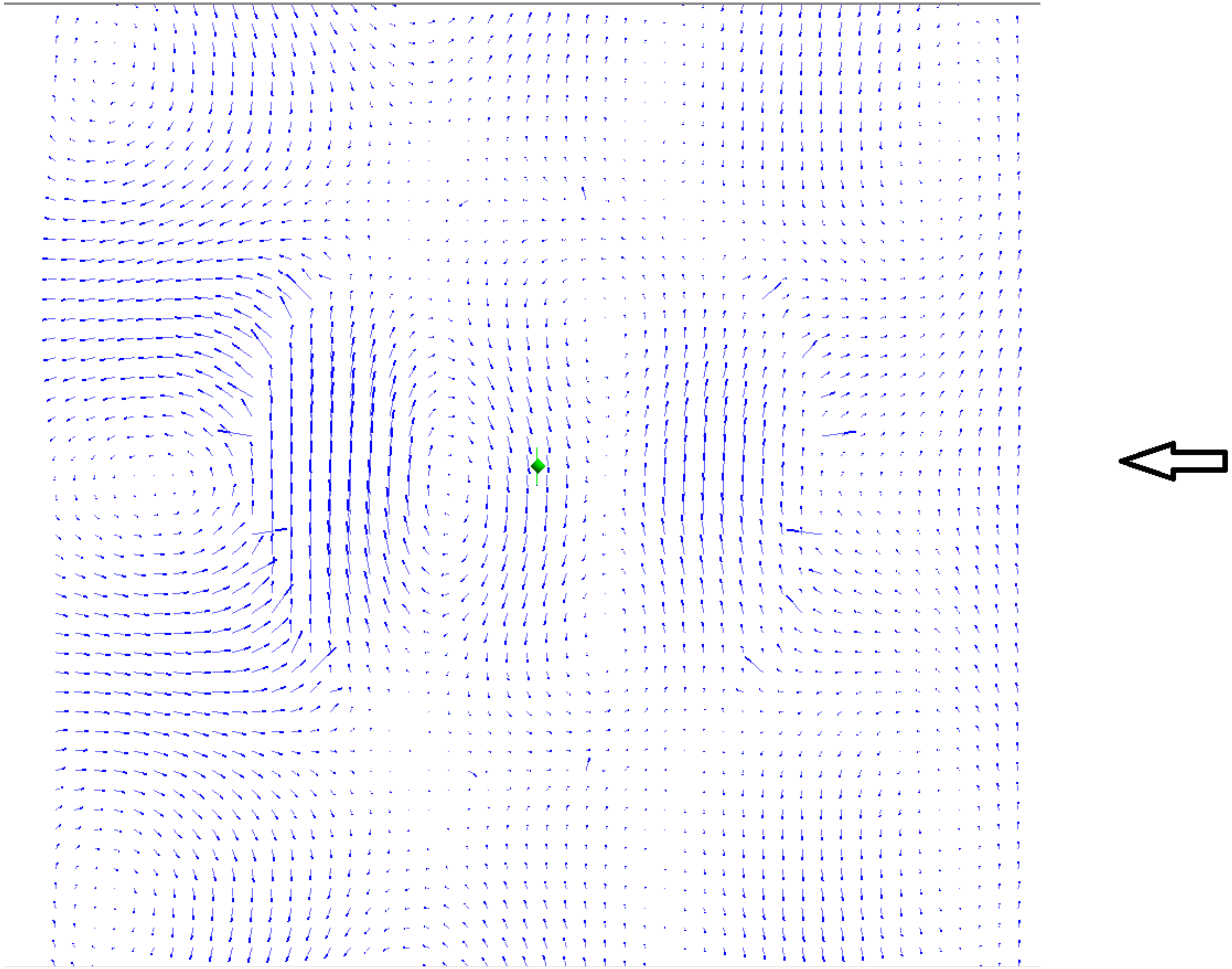
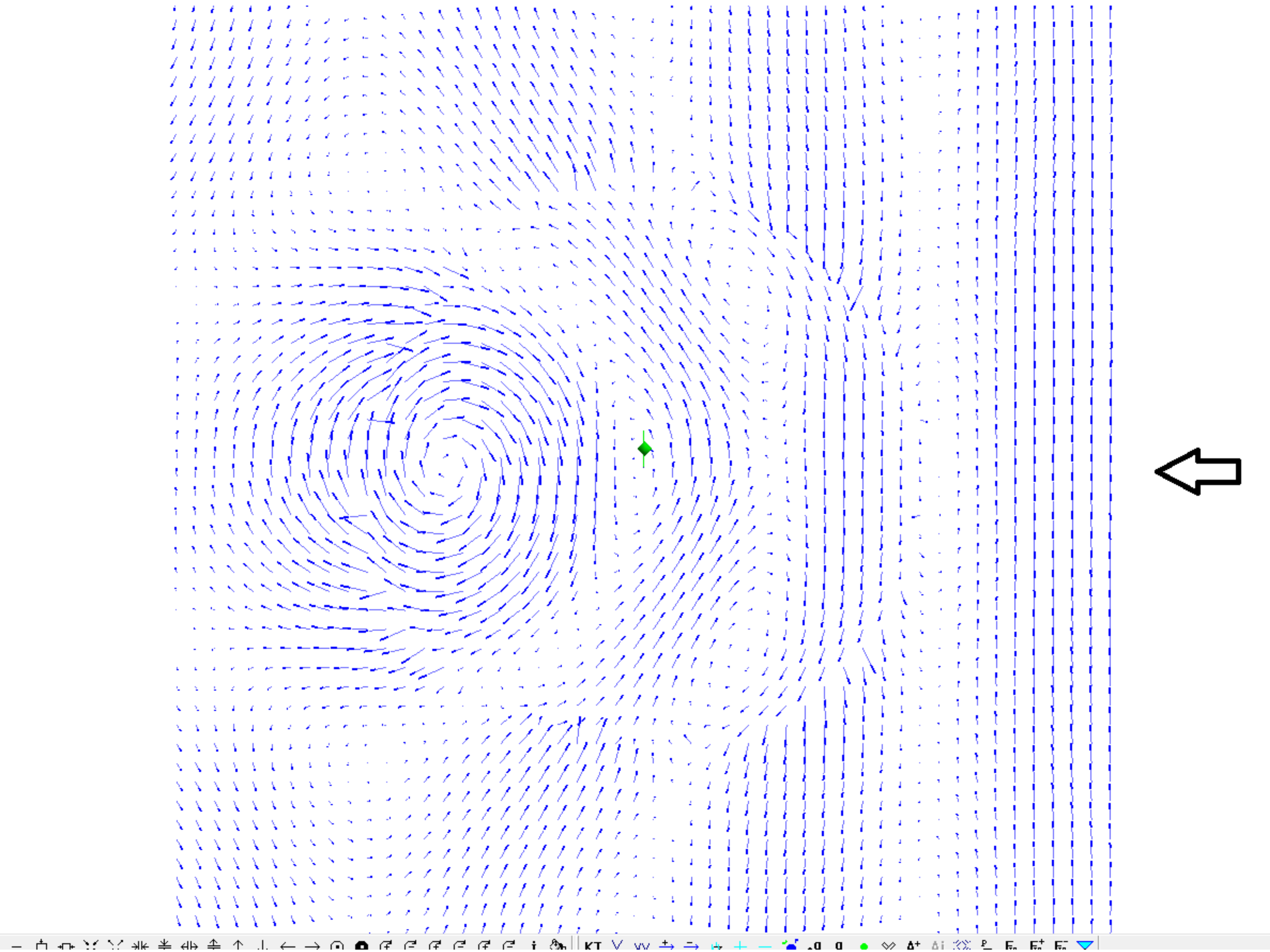


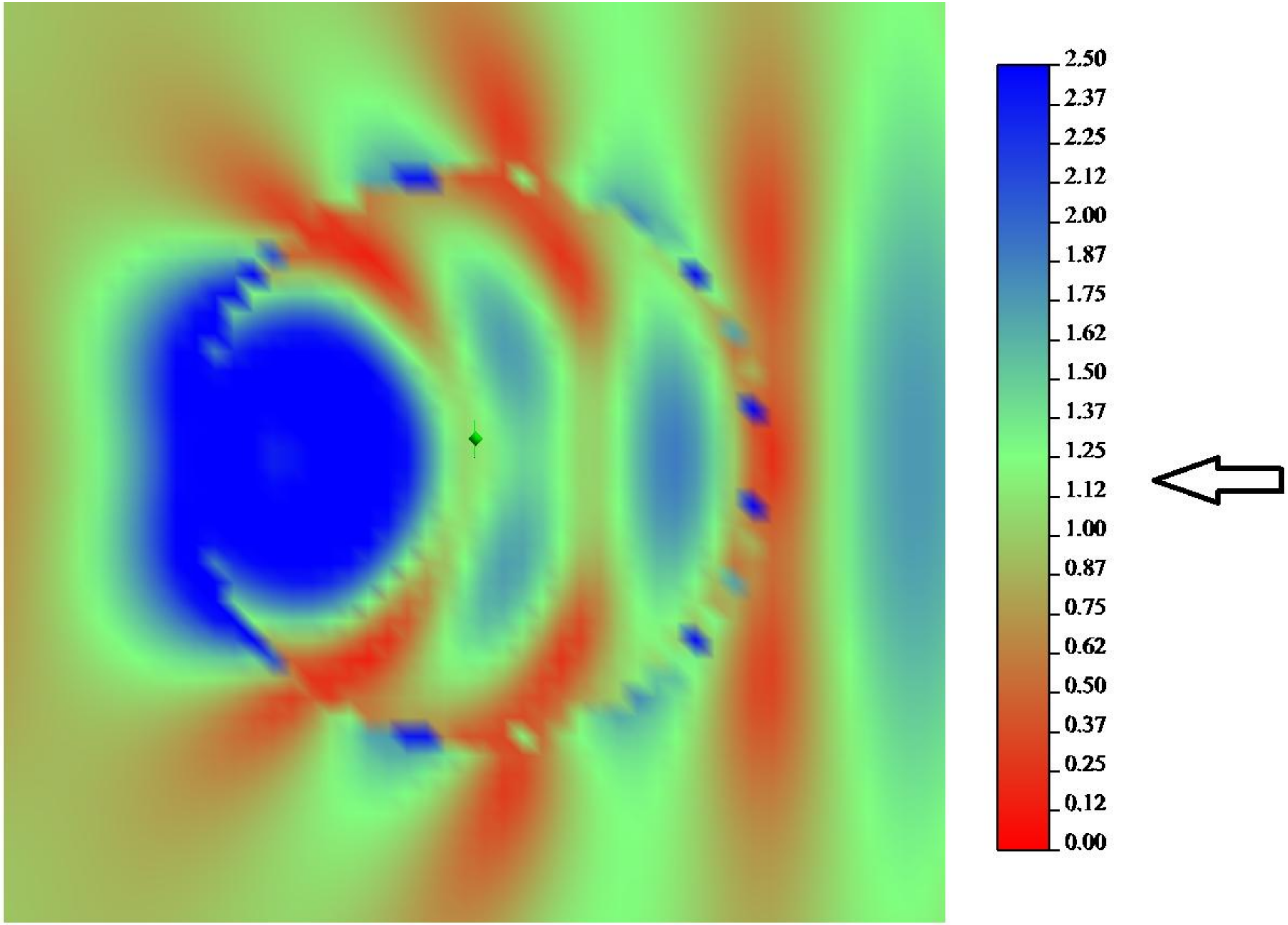
Диаграмма рассеяния. Длина волны $\lambda = 2r$.



Действительная часть часть электрического поля.

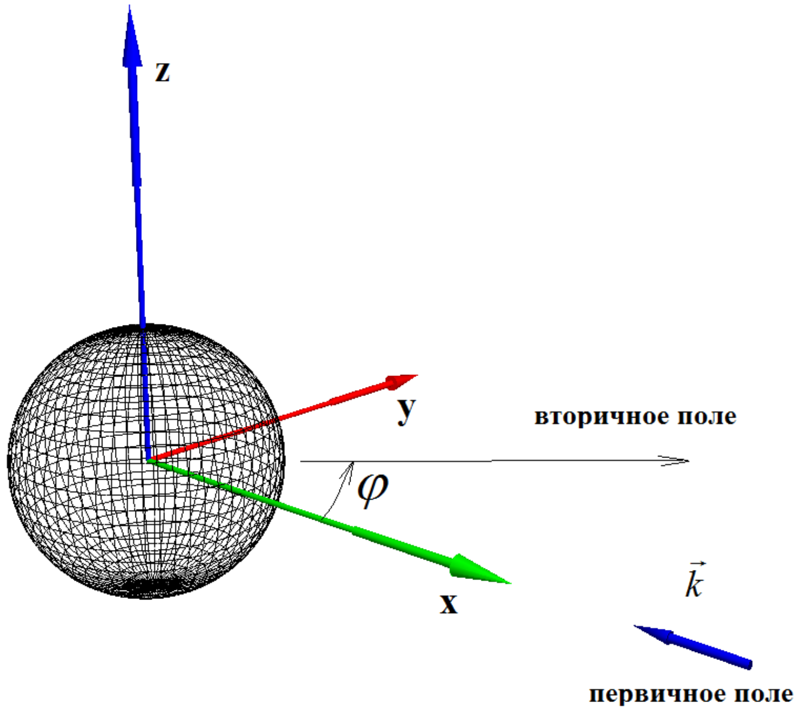


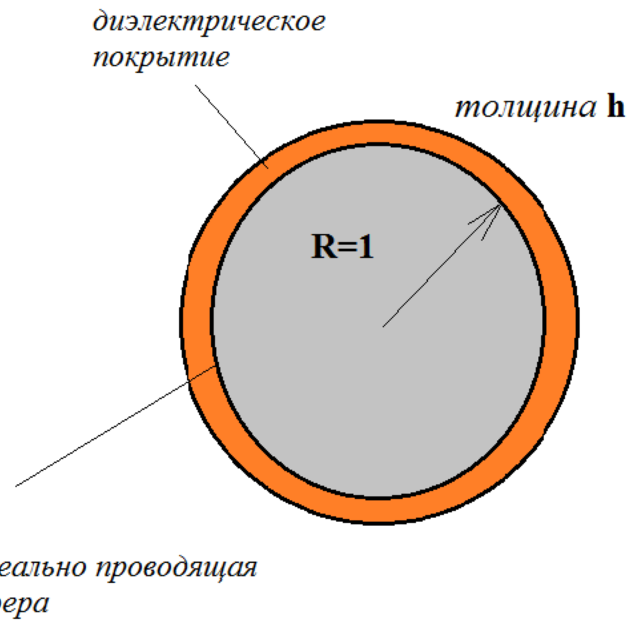
Мнимая часть электрического поля.



Модуль электрического поля

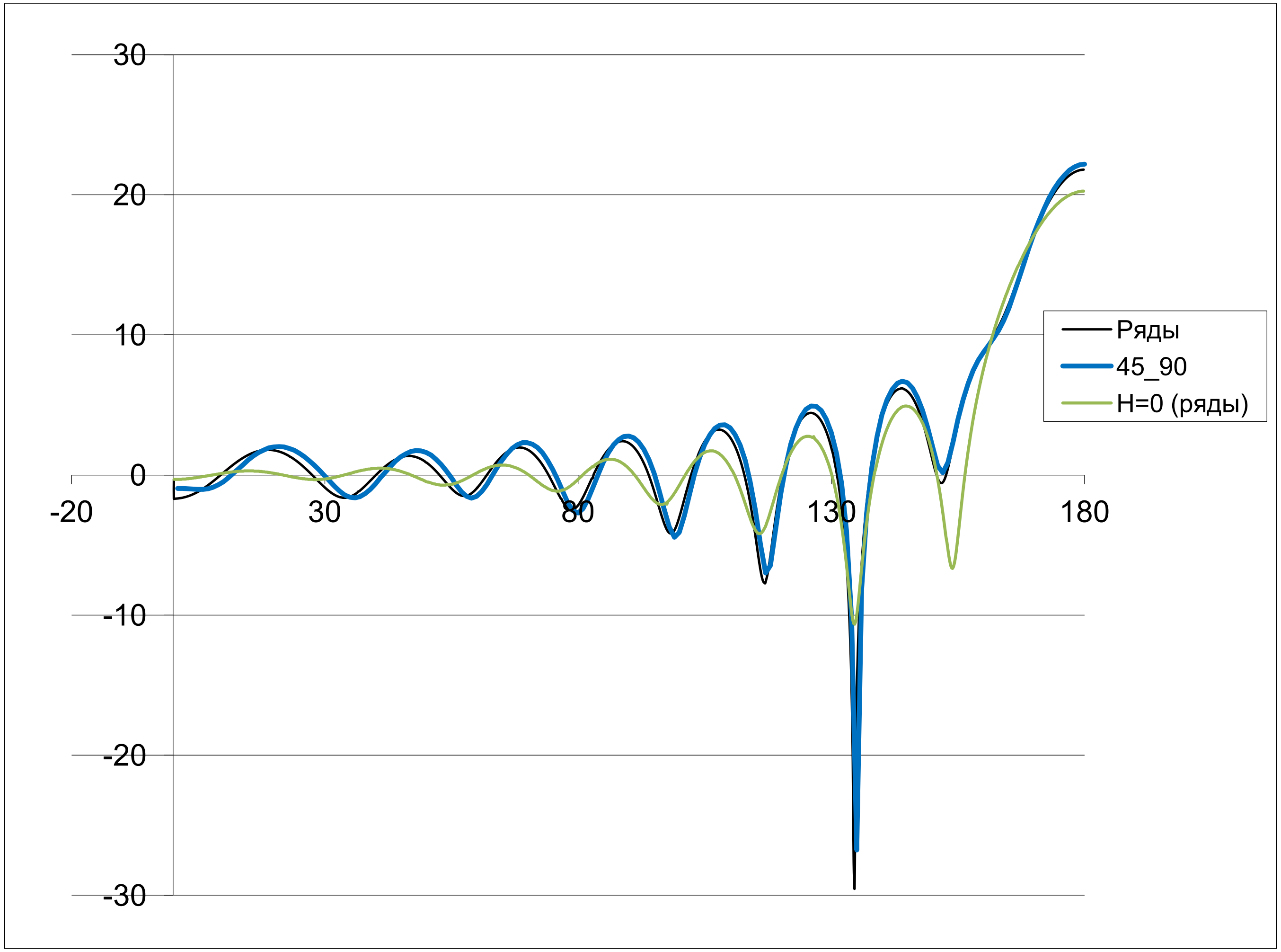
РАССЕЯНИЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРОЙ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОКРЫТИЕМ





Толщина покрытия $h = 0.02м$

$\varepsilon = 4,\ \mu = 1$



Прямая диаграмма рассеяния сферы с покрытием. $R = 1м$, $h = 2см$, $\varepsilon = 4$ $k = 10м^{-1}$.

Разбиение идеально-проводящей поверхности 45*90 ячеек (общее число ячеек 8100).

РАССЕЯНИЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНОЙ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОКРЫТИЕМ

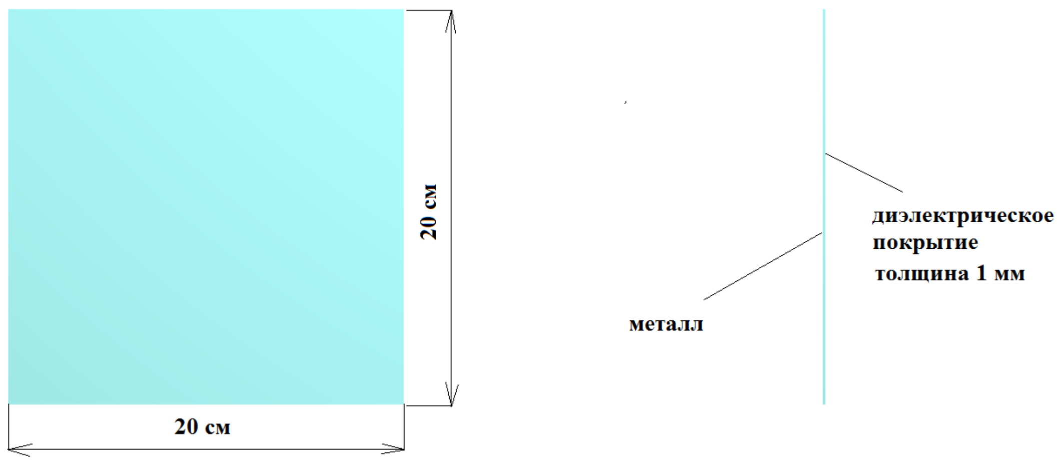


Схема пластины

Коэффициент поглощения:

$$\theta = 10\lg\frac{\sigma(\alpha)}{\sigma(180-\alpha)},$$

$$\alpha \in [0, 90^\circ].$$

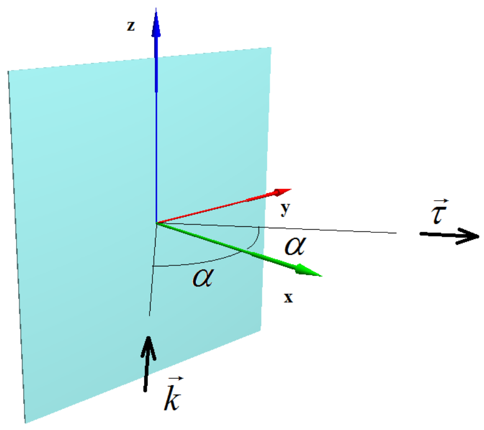
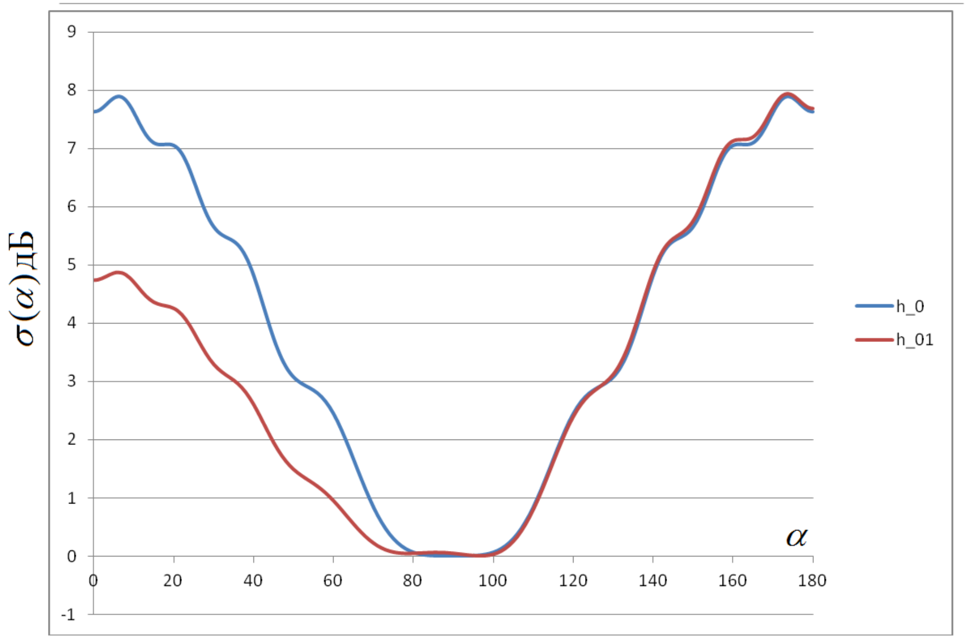


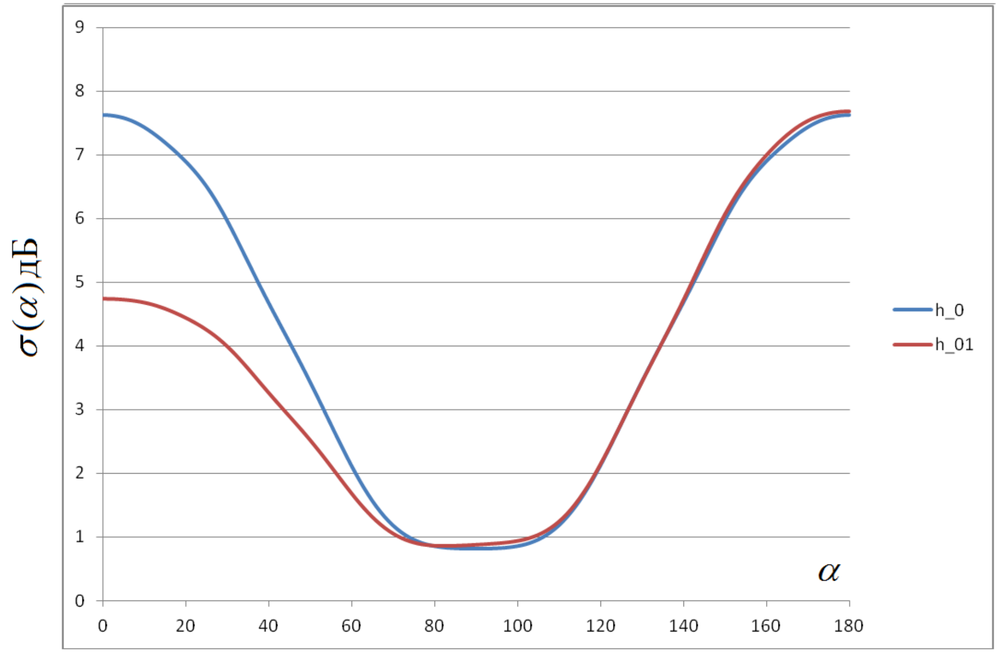
Схема облучения

Покрытие с комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\sigma$$



Горизонтальная поляризация



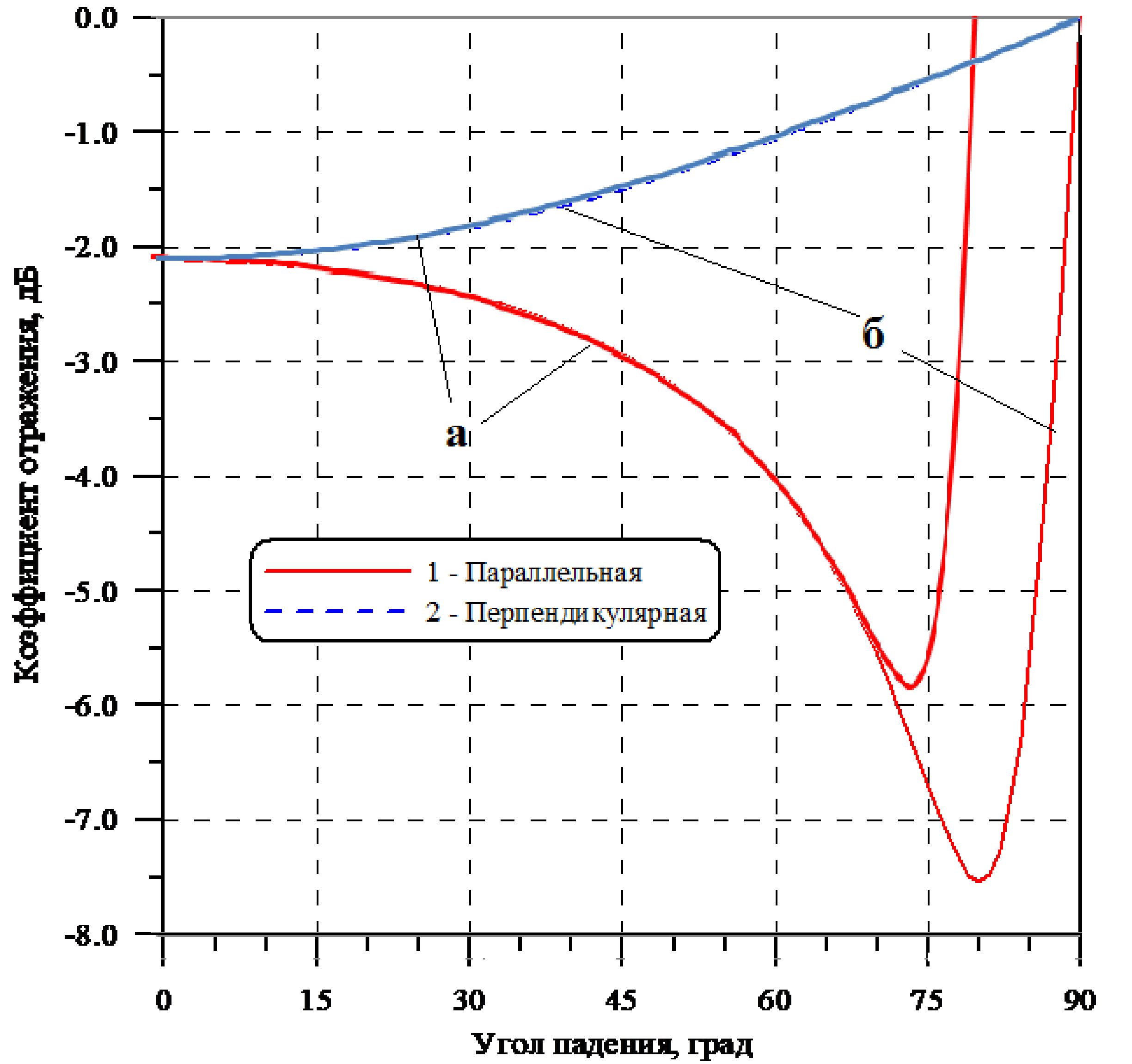
Вертикальная поляризация

Диаграмма рассеяния. Частота 5.84 Ггц.

Коэффициент поглощения

$$k = \frac{\sigma(coated) - \sigma(perfect)}{\sigma(coated)}$$

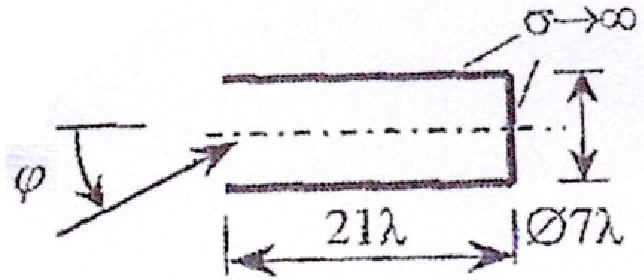
$$\tilde{k} = 10\lg k$$

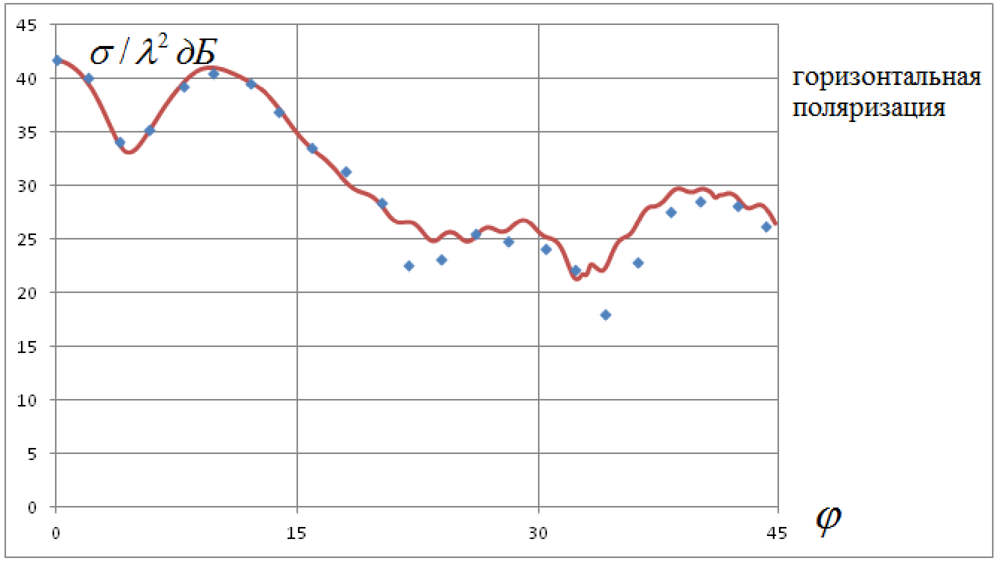


Коэффициент поглощения. Частота 5.84 Ггц.

а) - расчет, б) - эксперимент (ИТПЭ РАН)

ДИАГРАММА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА 1





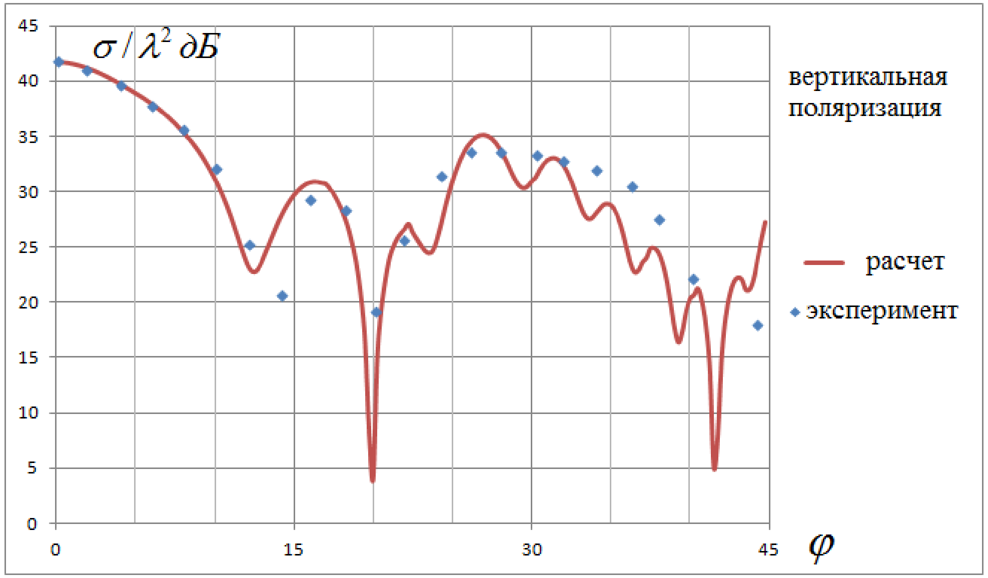


ДИАГРАММА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА 2

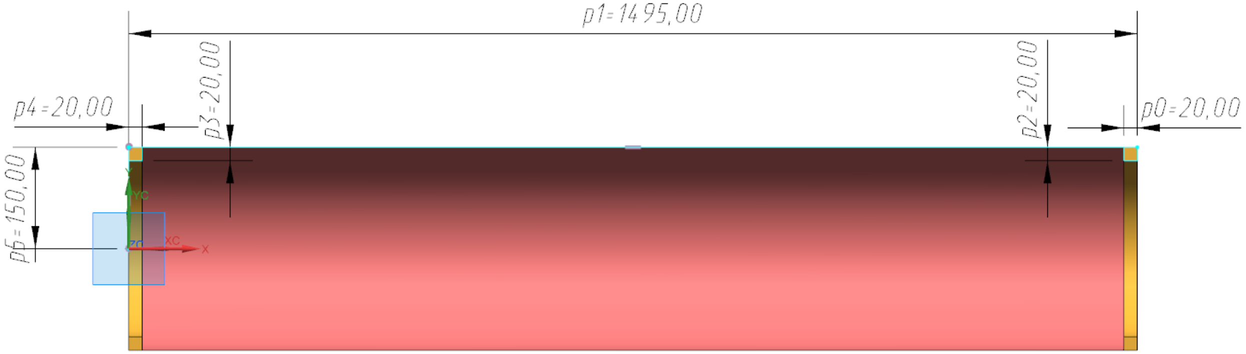
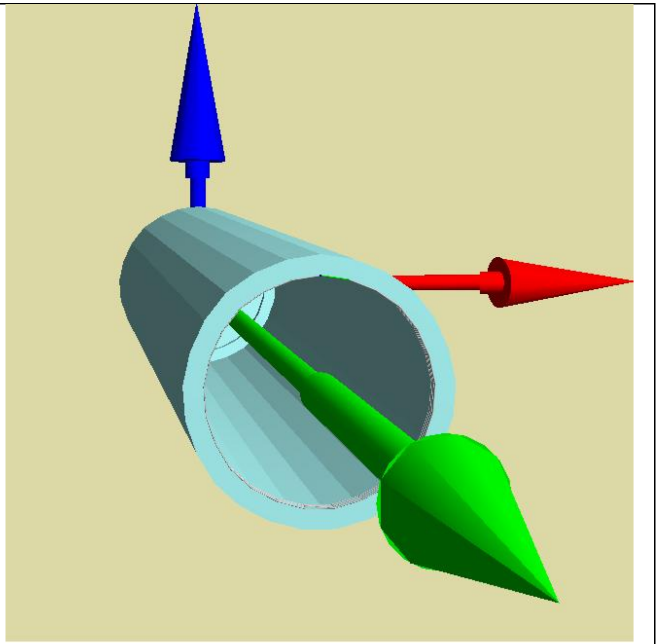
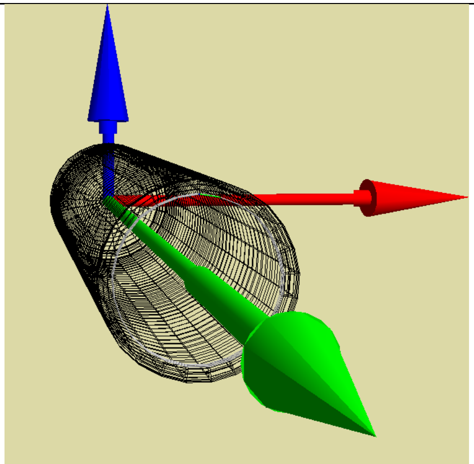


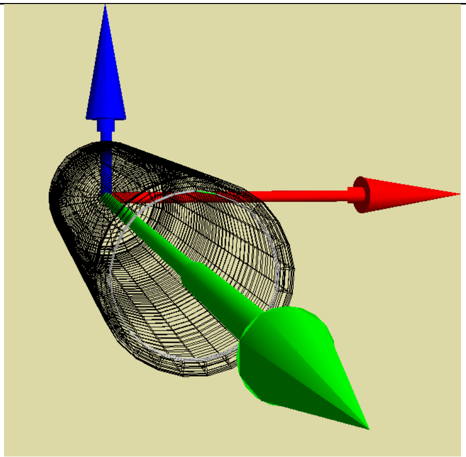
Схема геометрии полого цилиндра.



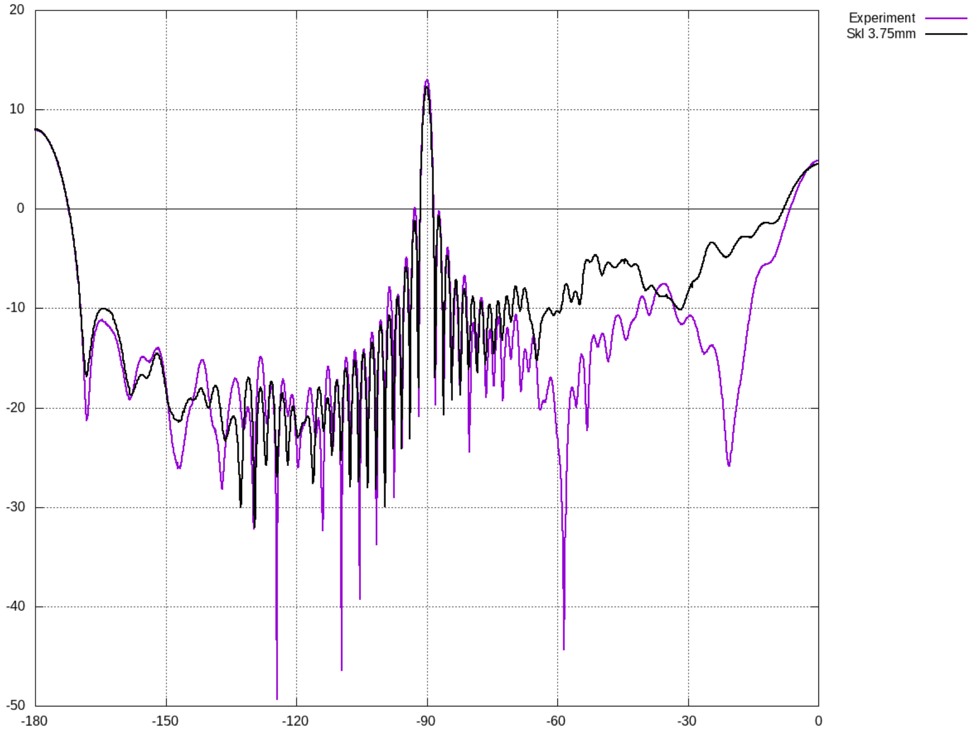
Трехмерная модель объекта.



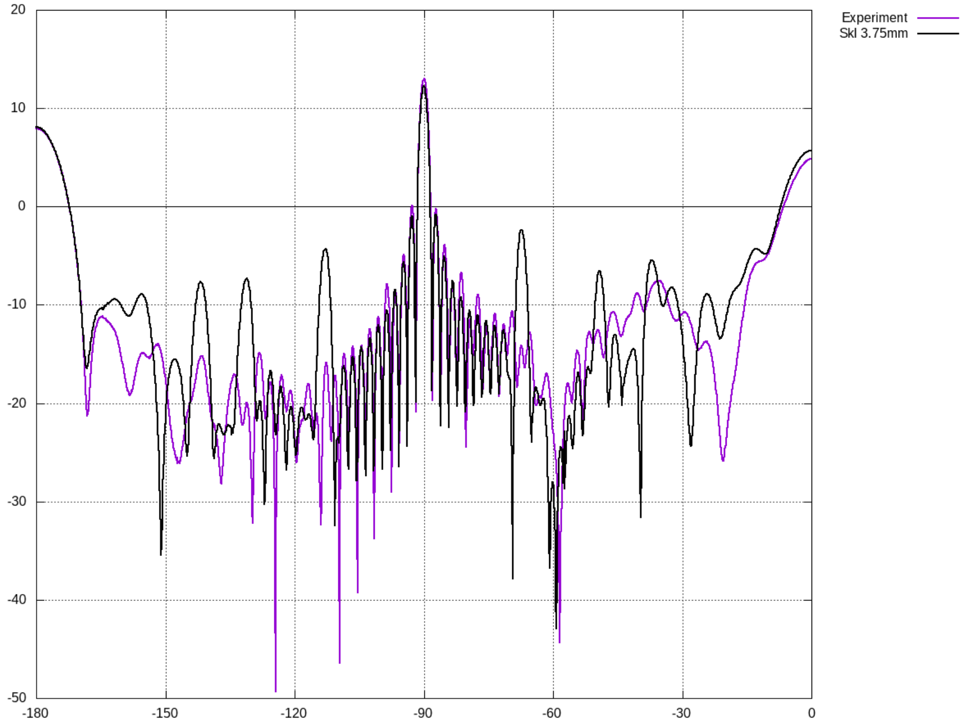
Тонкостенная модель



Модель с толстой стенкой



Модель с тонкими стенками



Модель с толстыми стенками толщина стенок - бралась 3мм, толщина дна - 5мм.

Диаграмма обратного рассеяния. Частота 3 ГГц. Вертикальная поляризация.

455 112 неизвестных. Размер ячейки < 3,75мм

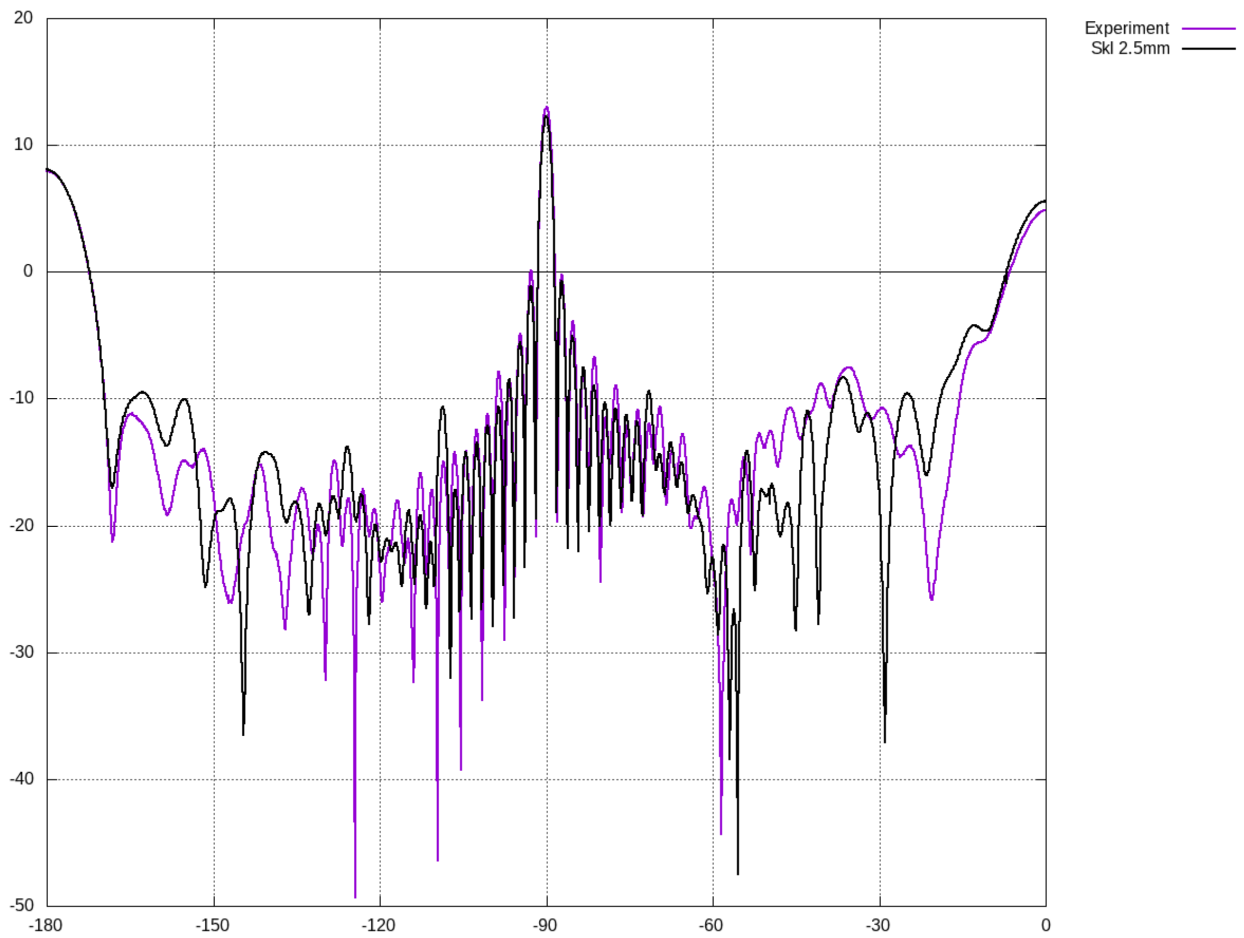


Диаграмма обратного рассеяния. Частота 3 ГГц, вертикальная поляризация.

Модель с толстыми стенками.1 019 088 неизвестных. Размер ячейки < 2,5мм

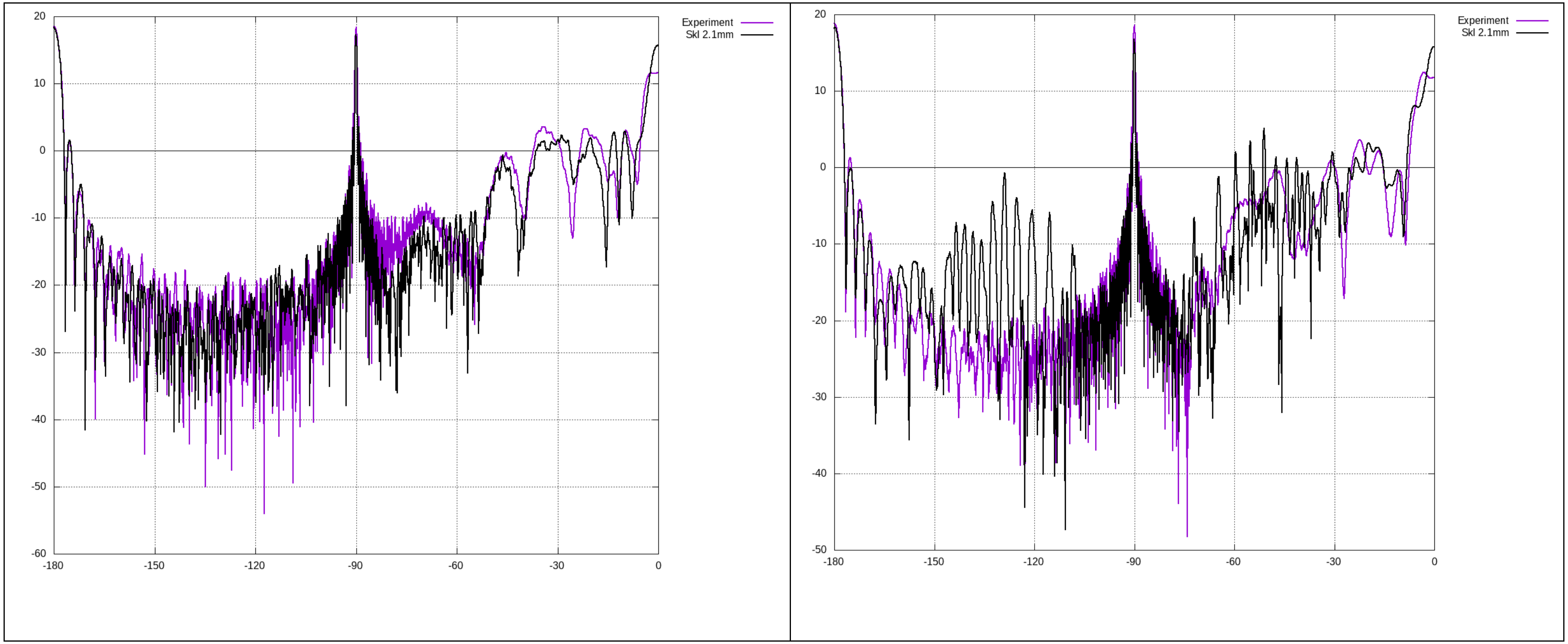
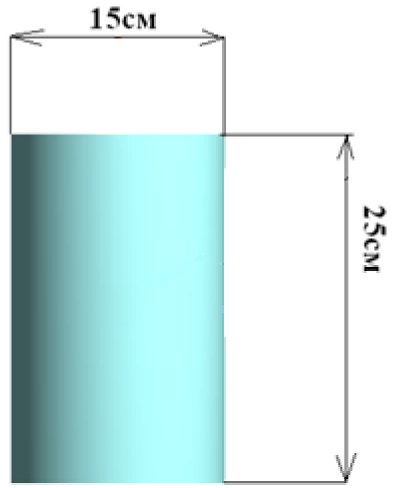


Диаграмма обратного рассеяния. Частота 10 ГГц. Модель с толстыми стенками.

1 508 800 неизвестных. Размер ячейки < 2,1мм

АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАТРАТЫ

<table>
<tr><td rowspan="6">

расчет обратной диаграммы рассеяния</td><td>частота</td><td>λ</td><td>H / λ</td><td>Число уравнений</td><td></td></tr>
<tr><td>до 4 Ггц</td><td>более 7 см</td><td>Менее 4</td><td>до 20 000</td><td>персональный компьютер, версия без сжатия матриц до ~ 10 мин.</td></tr>
<tr><td>8 Ггц</td><td>3,75 см</td><td>~7</td><td>до 50 000</td><td>персональный компьютер, версия без сжатия матриц до несколько часов версия со сжатием матриц ~ 10 мин.</td></tr>
<tr><td>16 Ггц</td><td>1,9 см</td><td>~12</td><td>100-200 тыс.</td><td>Персональный компьютер с оперативной памятью >16 Ггб. Версия со сжатием матриц. 1-2 суток</td></tr>
<tr><td>32 Ггц</td><td>0,93см</td><td>~25</td><td>500 тыс.</td><td>Кластер 50-100 ядер Параллельная версия со сжатием матриц, 3-4 часа</td></tr>
<tr><td>64 Ггц</td><td>0,47 см</td><td>~50</td><td>1-2 млн</td><td>Кластер 100 ядер Параллельная версия со сжатием матриц, 1-3 суток</td></tr>
</table>

PUBLICATIONS

1. Zakharov E. V., Ryzhakov G. V., Setukha A. V. Numerical solution of 3d problems of electromagnetic wave diffraction on a system of ideally conducting surfaces by the method of hypersingular integral equations // *Differential Equations*. — 2014. — Vol. 50, no. 9. — P. 1240–1251.

2. Zakharov E. V., Setukha A. V., Bezobrazova E. N. Method of hypersingular integral equations in a three-dimensional problem of diffraction of electromagnetic waves on a piecewise homogeneous dielectric body // *Differential Equations*. — 2015. — Vol. 51, no. 9. — P. 1197–1210.

3. Setukha A. V., Bezobrazova E. N. The method of hypersingular integral equations in the problem of electromagnetic wave diffraction by a dielectric body with a partial perfectly conducting coating // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2017. — Vol. 32, no. 6. — P. 371–380.

4. Setukha A., Fetisov S. The method of relocation of boundary condition for the problem of electromagnetic wave scattering by perfectly conducting thin objects // *Journal of Computational Physics*. — 2018. — Vol. 373. — P. 631–647.

5. Aparinov A. A., Setukha A. V., Stavtsev S. L. Parallel implementation for some applications of integral equations method // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2018. — Vol. 39, no. 4. — P. 477–485.

6. Fetisov S. N., Setukha A. V. Numerical solution of problem of electromagnetic wave diffraction by a perfectly conducting body of small thickness // 2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS), St Petersburg, Russia, 22-25 May. — IEEE Conference Proceedings. — IEEE, 2017. — P. 2721–2727.

7. Aparinov A., Setukha A., Stavtsev S. Supercomputer modelling of electromagnetic wave scattering with boundary integral equation method // *Communications in Computer and Information Science*. — 2017. — Vol. 793. — P. 325–336.