

# Суперкомпьютерные технологии при реализации метода граничных интегральных уравнений в задачах электромагнитного рассеяния

Сетуха А.В., Апаринов А.А., Ставцев С.Л., Фетисов С.Н.

МГУ им. М.В. Ломоносова, ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского,  
ИВМ РАН, ОКБ им. А. Люльки

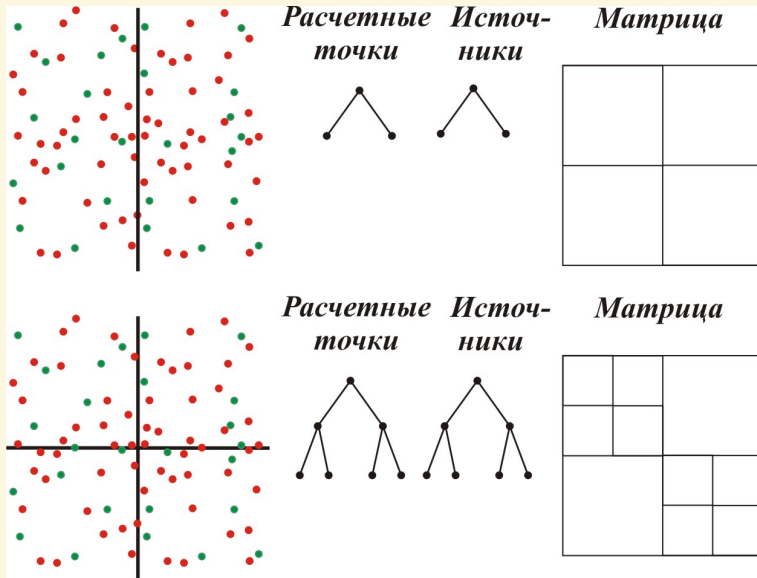
Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности

1 октября, 2019г.

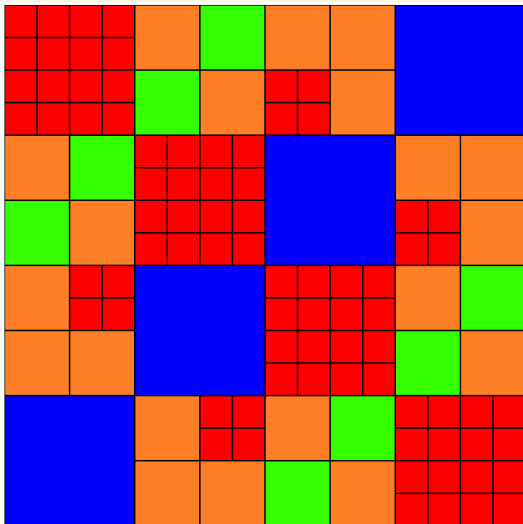
# План доклада

- 1 Малоранговые аппроксимации
- 2 Предобуславливатель

## Иерархичность построения блоков



## Разбиение матрицы на блоки



Малоранговые  
блоки:

$$A_i = U_i V_i^T$$

## Малоранговые блоки

Одноранговая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -3 & -5 & -7 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 5 \ 7).$$

Для матрицы  $A$  с  $size(A) = m \times n$  ранга  $r$

$$A = UV^T, \quad size(U) = m \times r, \quad size(V) = n \times r.$$

Храним только  $r(m+n)$  (вместо  $m \cdot n$ ) элементов и вычисляем

$$y = UV^T x$$

за  $\mathcal{O}(r(m+n))$ , вместо  $\mathcal{O}(m \cdot n)$ !

## Вычисление малоранговых аппроксимаций

- сингулярное разложение:

$$A = V\Sigma U^T,$$

где  $V, U$  — ортогональные матрицы,  $\Sigma$  — диагональная матрица с сингулярными числами;

- использование подматрицы максимального объема

$$A = CA_{\square}^{-1}R,$$

где  $A_{\square}$  — подматрица максимального объема,  $C$  — столбцы,  $R$  — строки, соответствующие  $A_{\square}$ .

Goreinov S.A., Tyrtyshnikov E.E., Zamarashkin N.L. A theory pseudo-skeleton approximations. // Linear Algebra Appl. 261:1-21, 1997.

## Алгоритм неполной крестовой аппроксимации

REPEAT

$$u_{ip} := a_{ij_p} - \sum_{k=1}^{p-1} u_{ik}v_{j_pk}, i = 1, \dots, m$$

$$i_p = \max_i u_{ip}$$

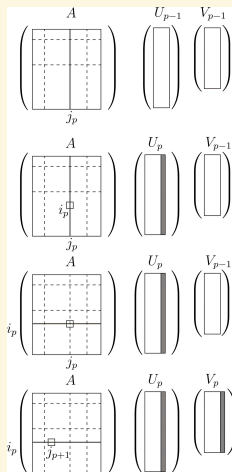
$$v_{ip} := a_{i_pj} - \sum_{k=1}^{p-1} u_{i_pk}v_{jk}, i = 1, \dots, n$$

$$j_{p+1} = \max_i v_{ip}$$

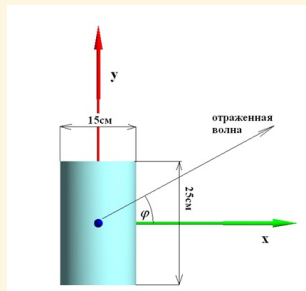
UNTIL

$$\left( \sqrt{\min(m, n) - (p-1)} \left( \|U_p V_p^T\|_F - \|U_{p-1} V_{p-1}^T\|_F \right) \geq \varepsilon \|U_p V_p^T\|_F \right)$$

$$\text{AND}((p + r_0) < \min(m, n))$$



## Геометрия объекта



Эффективная площадь рассеивания (ЭПР):

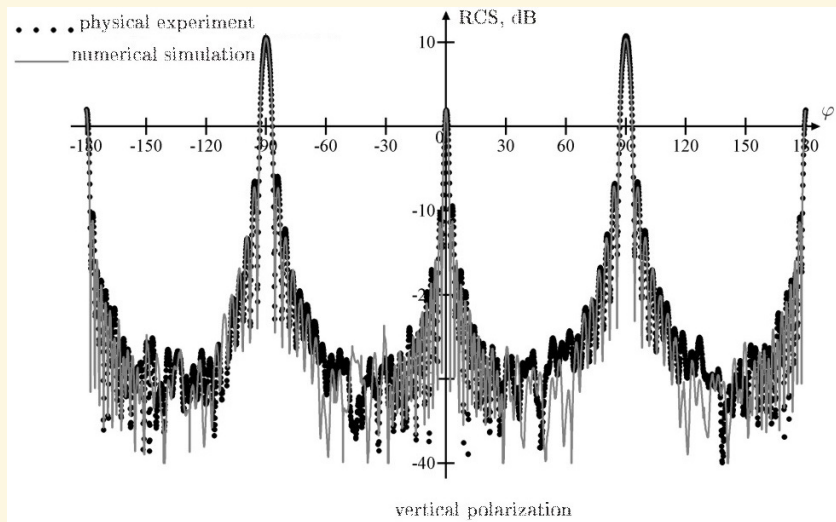
$$\sigma(\varphi) = 10 \lg \left( \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|E(R\varphi)|^2}{|E_0|^2} \right) \text{ дБ}$$

или для функции из правой части  $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 \exp(i(k\vec{\tau}, \mathbf{x}))$

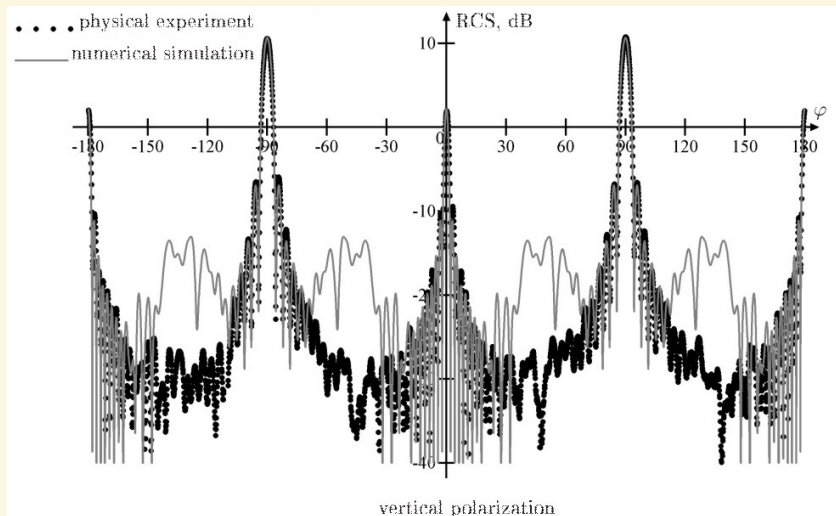
$$\sigma(\varphi) = 10 \lg \left| 4\pi \sum_j (\mathbf{J}_j(\varphi) - \vec{\tau}(\vec{\tau}, \mathbf{J}_j(\varphi))) k^2 \exp(-ik(\vec{\tau}, \mathbf{y}_j)) S_{\Sigma_j} \right|^2 \text{ дБ}$$



## Пример 1 расчета ЭПР

16 ГГц;  $n = 384312$ 

## Пример 2 расчета ЭПР

16 ГГц;  $n = 45784$ 

# Применение малоранговых аппроксимаций

Точность аппроксимации  $10^{-3}$ . Память в гигабайтах.

$m$	$n$	2ГГц	4ГГц	8ГГц	16ГГц	Без сжатия
7872	15744	0,559 15%	0,611 17%	0,706 19%	0,879 24%	3,694
21760	43520	1,744 6,2%	1,962 7,0%	2,340 8,3%	2,999 11%	28,223
30400	60800	2,480 4,5%	2,807 5,1%	3,375 6,1%	4,356 7,9%	55,084
45784	91568	3,933 3,1%	4,457 3,6%	5,369 4,3%	6,927 5,6%	124,920
85542	171084	8,011 1,8%	9,086 2,1%	10,94 2,5%	14,08 3,2%	436,153

$m$  – число ячеек,  $n$  – размер матрицы

## Параллельный алгоритм

Параллельная версия алгоритма.

$$n = 57600$$

$p$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	312
$k_1$	1.0	2.0	3.9	7.6	15.1	27.4	54.1	67.8	151.2	165.0
$k_2$	1.0	1.0	2.9	6.8	14.4	29.5	59.2	107.3	228.9	264.3

## Решение системы

Решение с помощью метода GMRES.

2048 правых частей.

Число итераций:

$n$	2 ГГц	4 ГГц	8 ГГц	16 ГГц
15744	1862	2355	4390	9410
43520	2821	4261	6025	11237
60800	3651	4791	7285	12990
91568	4262	5689	-	-
171084	-	-	-	-

$n$  – размер матрицы

## Решение системы

Память для решения системы

$n$	2 ГГц	4 ГГц	8 ГГц	16 ГГц
15744	0,677 ГБ	0,793 ГБ	1,270 ГБ	2,448 ГБ
43520	2,494 ГБ	3,428 ГБ	4,572 ГБ	8,242 ГБ
60800	4,236 ГБ	5,268 ГБ	10,703 ГБ	12,886 ГБ
91568	7,213 ГБ	9,161 ГБ	-	-
171084	-	-	-	-

$n$  – размер матрицы

# План доклада

- 1 Малоранговые аппроксимации
- 2 Предобуславливатель

## Решение системы с предобуславливателем

Для системы

$$Ax = b$$

решаем систему

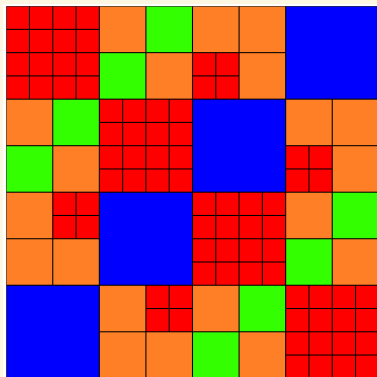
$$AM^{-1}y = b, \text{ где } y = Mx$$

Свойства предобуславливателя  $M$ :

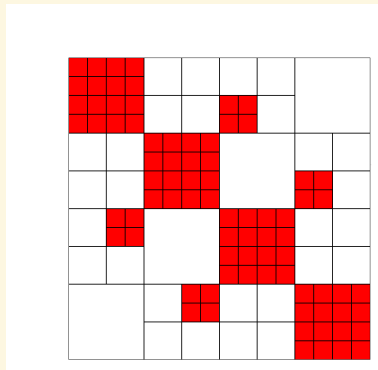
- занимает мало памяти;
- с этой матрицей быстро решается система;
- матрица  $M^{-1}$  близка к матрице  $A^{-1}$ .



## Решение системы с предобуславливателем



Блочная структура исходной матрицы  $A$



Ненулевые блоки предобуславливателя  $M$

# Использование MUMPS

Использование разреженного солвера из пакета MUMPS:

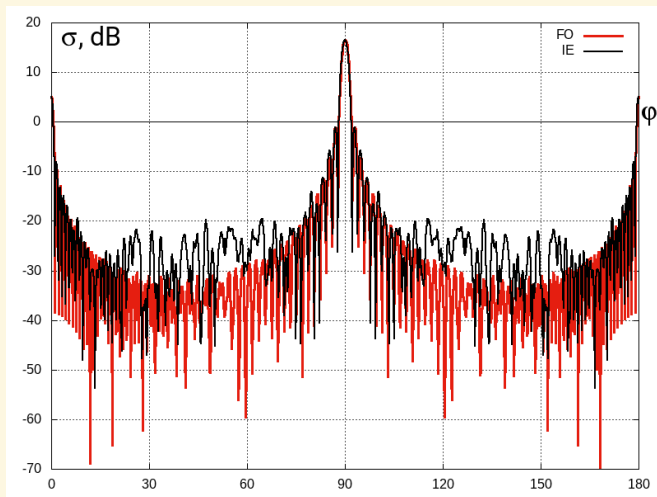
- 1 исходная матрица  $A$  представляется в малоранговом формате, при этом определяется структура матрицы и расположение в ней плотных блоков;
- 2 информация о найденных плотных блоках собирается на одном процессоре и с помощью пакета MUMPS определяется распределение вычисляемых элементов матрицы  $M$  по процессорам;
- 3 вычисляется предобуславливатель  $M$ ;
- 4 с помощью пакета MUMPS параллельно рассчитывается  $LU$  разложение разреженной матрицы  $M$ ;
- 5 для того, чтобы решить систему  $Ax = b$  методом GMRES с помощью пакета MUMPS и  $LU$  разложения матрицы  $M$  на каждом шаге итерации решается система  $Mz = c$ .

## Эффективность предобуславливателя

Число итераций без использования предобуславливателя и с использованием предобуславливателя.

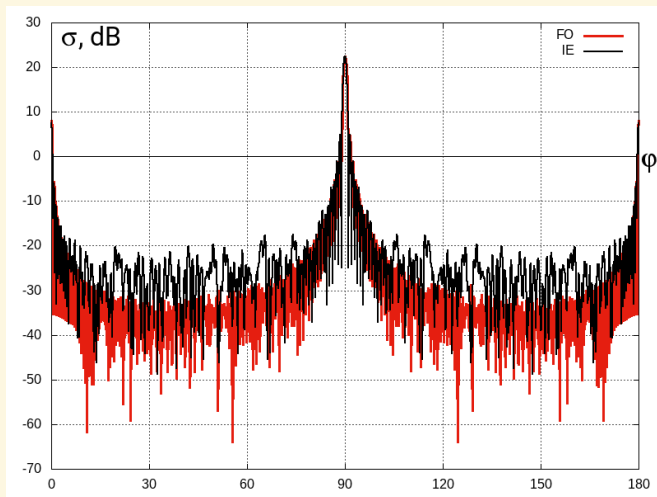
$n$	34 122	94 872	167 676	376 800
$p_1$	4 684	7 563	9 777	14 514
$p_2$	949	1 051	1 116	1 488

## ЭПР, 32 ГГц



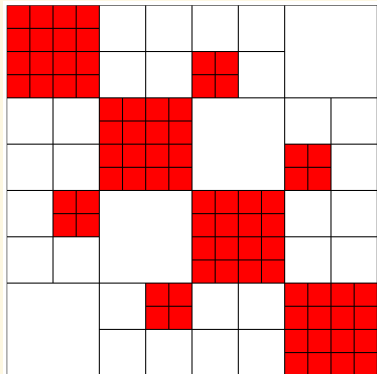
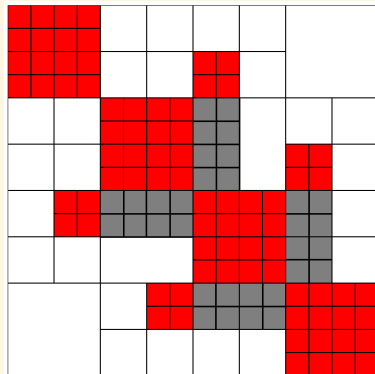
ЭПР, 32 ГГц, вертикальная поляризация,  $n = 1\,507\,200$

## ЭПР, 64 ГГц



ЭПР, 64 ГГц, горизонтальная поляризация,  $n = 2\,006\,928$

## Развитие предобуславливателя

Исходная матрица  $M$ Структура матриц  $L$  и  $U$  из  
 $M = LU$

## Память для предобуславливателя

Память для хранения матриц (в ГБ).

$f$	4 ГГц	8 ГГц	12 ГГц	16 ГГц
$N$	34 122	94 872	167 676	376 800
$M_{MS}$	1.5	3.92	7.7	19.2
$M_{ds}$	0.394	1.732	2.725	4.22
$M_{MUMPS}$	5.3	24.4	53.3	162.8
$M_{LU}$	2.715	11.0	20.5	62.4

Точность сжатия блоков в  $L$  и  $U$  равна  $10^{-2}$ .