



Некоторые задачи для высокопроизводительных вычислений

*Галанин Михаил Павлович
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*

МГУ им. М.В. Ломоносова
12 ноября 2013 г.



Содержание

- i. Комплекс программ CaPpaPI для проведения вероятностных расчетов термомеханики тепловыделяющих элементов
- ii. Метод Конечных СуперЭлементов Федоренко и некоторые его приложения
- iii. Математическое моделирование канализированных радиационно ускоренных выбросов



Цель доклада

- Информирование коллег о работах по указанной тематике в научной группе докладчика в ИПМ им. М.В. Келдыша (11 отдел)

С.М. Богатырь², М.П. Галанин¹, М.М. Горбунов-Посадов¹,
А.С. Гусев³, А.С. Еременко², А.В. Ермаков¹, В.И. Кузнецов²,
В.В. Лукин¹, В.В. Новиков², А.С. Родин¹, А.В. Салатов²,
М.В. Сыпченко², А.А. Фальков³, К.Л. Шаповалов¹

1 – ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

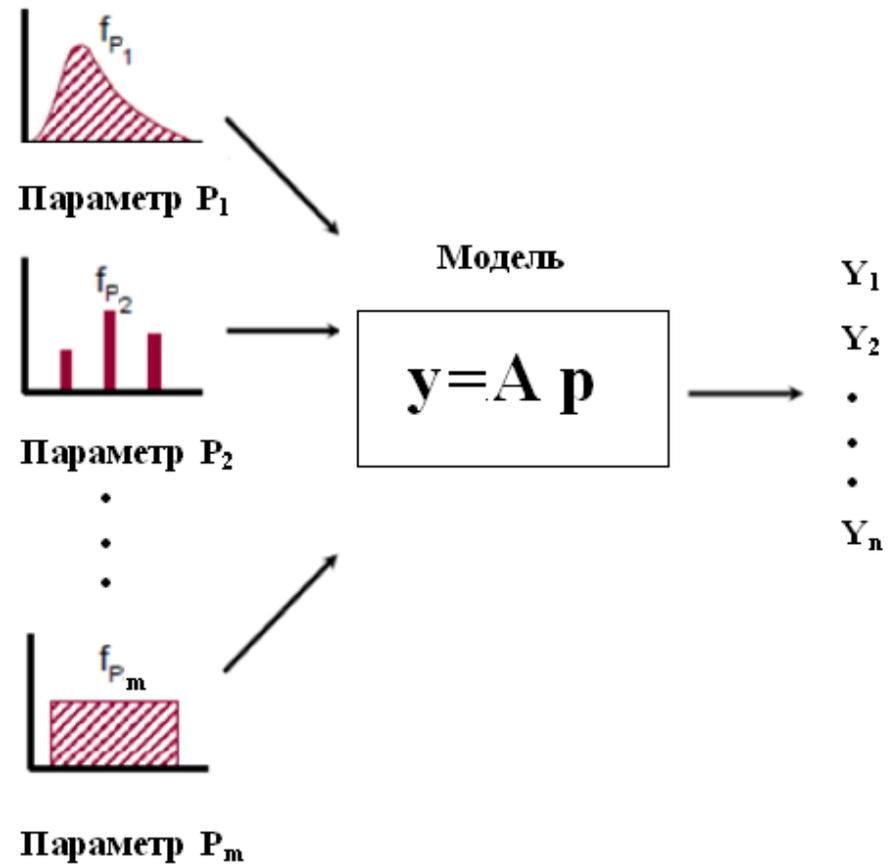
2 – ОАО ВНИИНМ им. А.А. Бочвара

3 – ОАО «ОКБМ Африкантов»

**Комплекс программ CaPpaPI
для проведения
вероятностных
расчетов термомеханики
тепловыделяющих элементов**

Введение

Модель объекта
как «черный ящик»



Неопределенность входных параметров —>
выходные приходится считать СВ с неизвестными ФР

- **Цель: создание компьютерной системы для проведения критериальных расчетов термомеханики (ТВЭЛОВ).**
- **Требования :**
 - **варьирование по заданным вероятностным законам входных параметров,**
 - **изменение количества выходных параметров,**
 - **представление результатов в удобной форме.**

- **Модель: коды START-3, RAPTA-5.2, RELAP/SCDAPSIM**
- **Программный код SaPpaPI (Complex of Programs for Probability Investigations)**

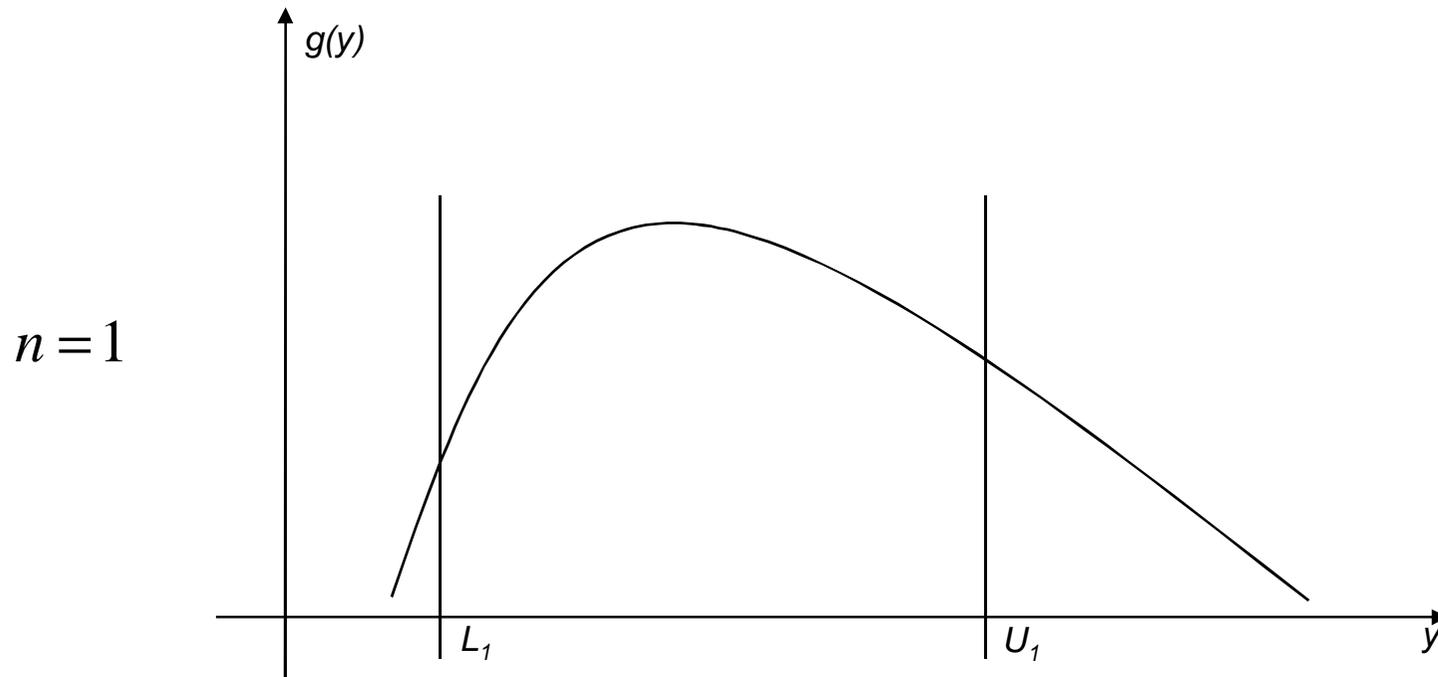
- В работе – GRS метод. Преимущества: широкое использование; отсутствие ограничений по количеству неопределенных параметров; неопределенность выходных параметров имеет хорошо обоснованную статистическую базу; не используются поверхности откликов.
- Разработка вероятностной методики – на три блока:
 - 1) моделирование последовательности выборок случайных параметров с заданными функциями распределений,
 - 2) моделирование работы объекта,
 - 3) анализ результатов расчетов.

Методика ВР

- β — confidence level — доверительный уровень.
- γ — quantile — квантиль.
- Определить случайные границы $(L_i, U_i), i = 1 \dots n$ изменения выходных параметров такие, что

$$P \left\{ \int_{L_1}^{U_1} \dots \int_{L_n}^{U_n} g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n > \gamma \right\} = \beta$$

- $g(y_1, \dots, y_n)$ — плотность распределения выходных параметров, неизвестна. Выходные параметры — зависимые, зависимость неизвестна.



- Задача ВР: определение границ изменения выходных параметров путем проведения серии из N независимых случайных испытаний. Уровень надежности $(\beta|\gamma)$ (safety level) оценки.

- Расчетная формула:

$$\beta = 1 - I(\gamma, s_n - r_n, N - s_n + r_n + 1) = \sum_{j=0}^{s_n - r_n - 1} C_N^j \gamma^j (1 - \gamma)^{N-j}$$

- Тогда:

$$(L_j = y_j(r_j), U_j = y_j(s_j)), j = 1 \dots n,$$

$$s_n \leq s_{n-1} - r_{n-1} - 1 \leq s_1 - \sum_{j=1}^{n-1} (r_j + 1), r_n \geq r_{n-1} \geq \dots \geq r_1.$$

- Варианты односторонней оценки, без или с отбраковкой. Упрощения. Алгоритм отбора.

N для определения двусторонней доверительной области для различных n, β, γ

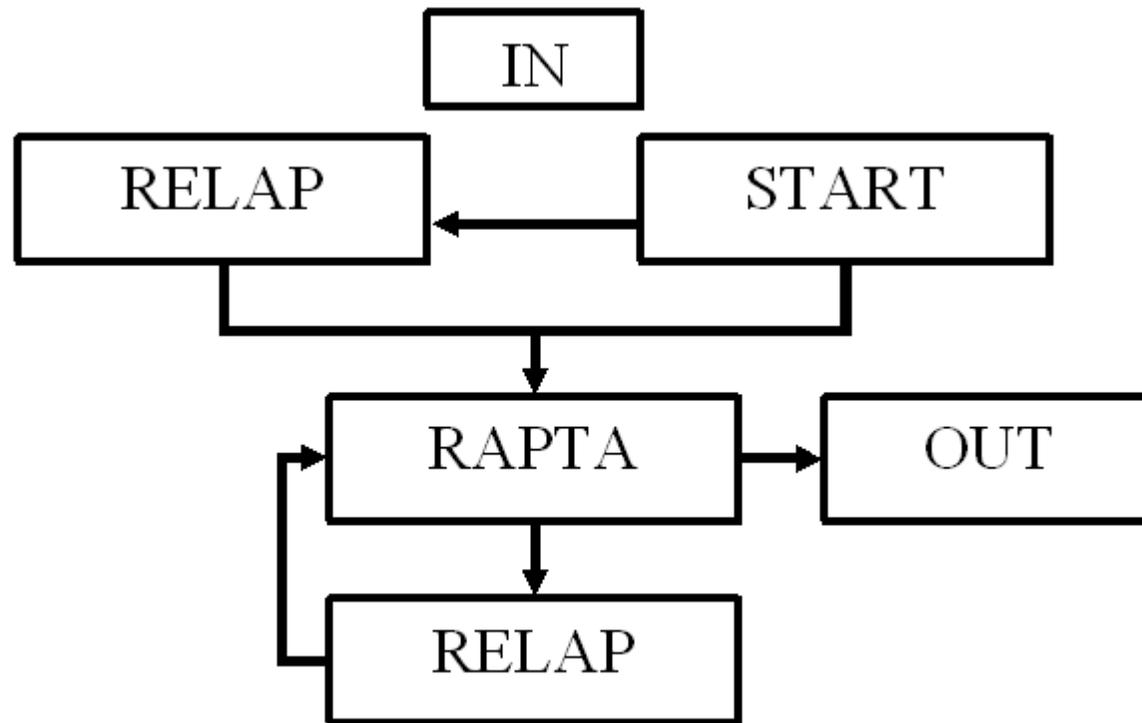
$\beta \backslash \gamma$	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	n
0.95	93	117	156	235	473	1
	153	191	256	385	773	2
	207	260	348	523	1049	3
0.96	98	123	165	249	499	1
	159	200	267	402	806	2
	215	269	360	542	1086	3
0.97	105	132	176	266	533	1
	167	210	281	422	848	2
	224	281	376	565	1134	3
0.98	114	143	192	289	581	1
	179	224	300	451	905	2
	237	297	397	598	1199	3
0.99	130	163	218	329	661	1
	197	248	331	499	1001	2
	258	324	433	651	1307	3

- Основа алгоритма генерации случайных входных параметров - генерация СВ α , равномерно распределенных на $(0,1)$.

$$F_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x \in (0,1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

- СВ ξ , имеющая ФР $F_{\xi}(x)$, - $\xi = F_{\xi}^{-1}(\alpha)$
- RAN2 для α , период повторения не хуже $2.3 \cdot 10^{18}$.

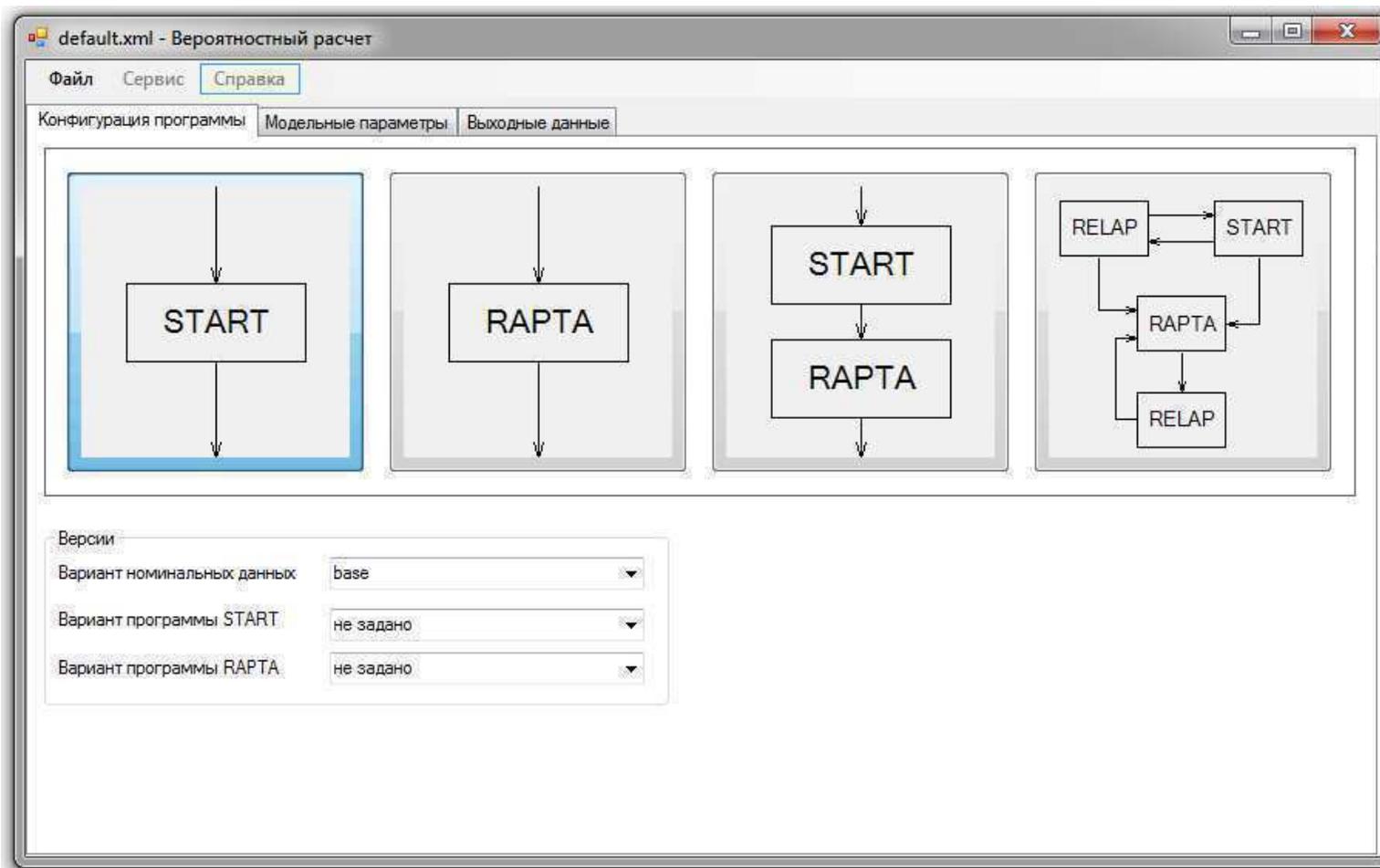
Структура кода CaPpaPI



Взаимосвязи расчетных кодов в комплексе CaPpaPI

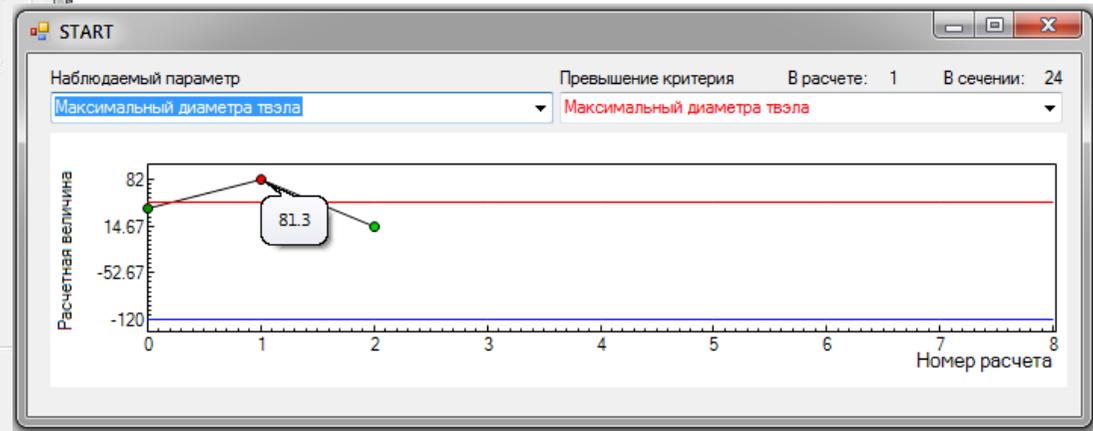
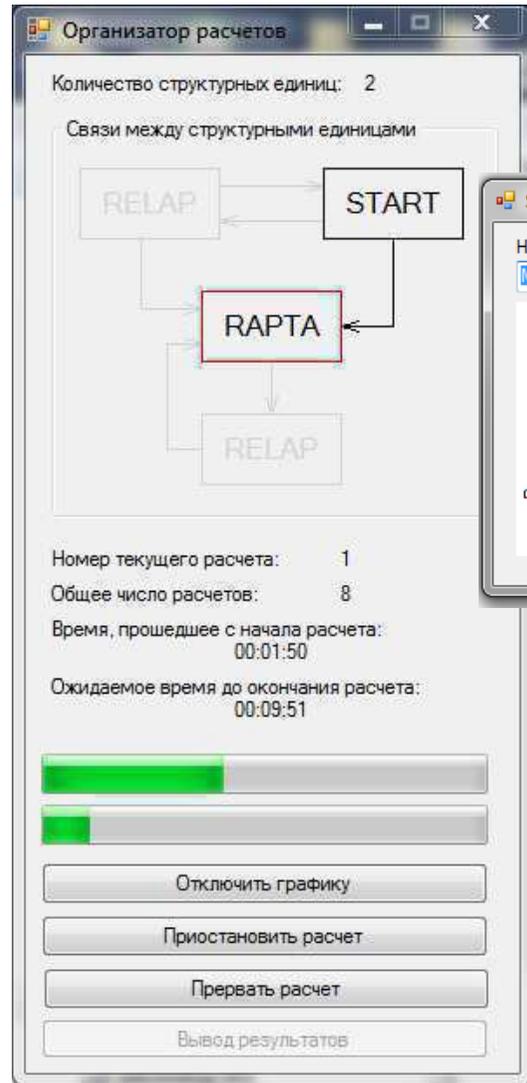
- START-3: термомеханический расчет твэла (или их группы) (режим нормальной эксплуатации)
- Готовит данные для расчета аварии типа LOCA с помощью RART-5.2.
- RELAP: серия теплогидравлических расчетов. Расчет условий на границах твэлов и их неопределенности.
- Варианты связи кодов, включая их итерационное взаимодействие.

Графический интерфейс ПК CaPpaPI



Выбор конфигурации расчетных кодов

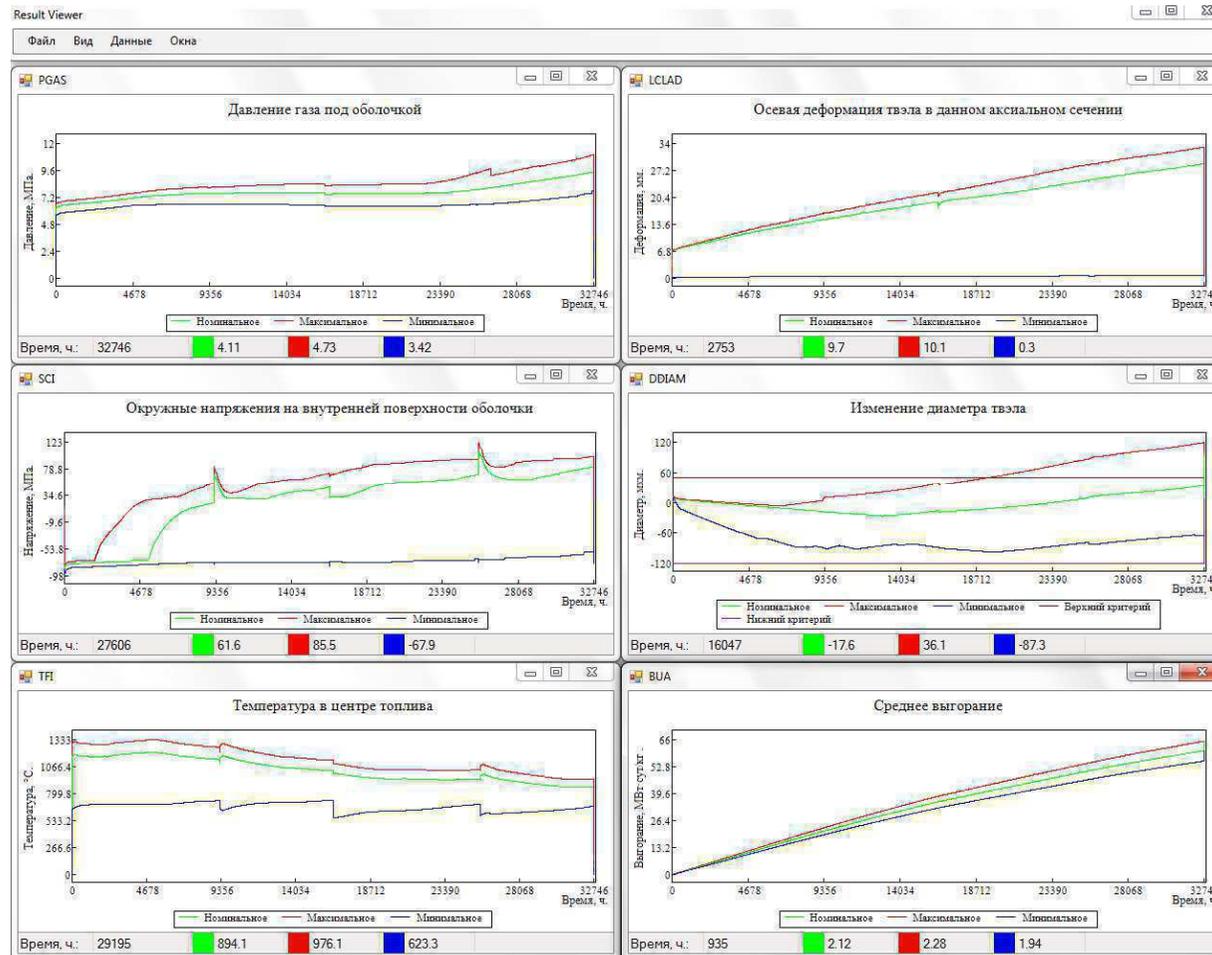
Графический интерфейс среды сопровождения серии ВР



Отображение информации о
критериальных параметрах в режиме
реального времени

Основные сведения о
текущем состоянии серии ВР

Графический интерфейс постобработчика серии VR



Заключение

- Приведены материалы работы, посвященной созданию кода вероятностных расчетов (ВР) критериальных характеристик твэлов в условиях нормальной эксплуатации и постулируемых аварий типа LOCA. Работа выполнена на основе применения кодов START-3, RAPTA-5.2, RELAP.

oooooooooooooooo
 ooooo
 ooooooo
 ooo

ooooo
 ooo
 oooooooooo
 oooooooooo
 ooo

Метод Конечных СуперЭлементов Федоренко и некоторые его приложения

М.П. Галанин¹

совместно с С.А. Лазаревой² и Е.Б. Савенковым¹

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

oooooooooooooooo
ooooo
ooooooo
ooo

ooooo
ooo
oooooooooo
oooooooooo
ooo

Задачи с локальными сингулярностями

Задачи с локальными ”сингулярностями” физической или геометрической природы:

- локальные, но резкие, скачки коэффициентов задачи (композитные среды и т.п.);
- локальные нагрузки (точечные силовые воздействия или тепловые источники и т.п.);
- расчетные области с локальными геометрическими сингулярностями (”скважины” и т.п.);
- и многое другое ...

Задачи и решения

Общая задача

$$\text{diam}(\text{“сингулярность”}) \ll \text{diam}(\text{расчетная область})$$

Традиционные КЭ или КР приближения ведут к задачам очень высокой размерности (размер сетки $h \approx 0.1 \text{ diam}(\text{сингулярность})$).

Возможные решения:

- адаптивные сетки (требуют специальных средств генерации сетки).
- специальные приближения на грубой сетке (сильно задачно-зависимый подход).

Метод конечных суперэлементов Федоренко (1974)

МКСЭ Федоренко

В исходном варианте предложен как вариант традиционных приближений Петрова-Галеркина с “базисными” функциями, которые являются точными решениями рассматриваемого уравнения в каждом СЭ отдельно.

Такое определение не позволяет использовать хорошо развитую теоретическую основу МКЭ прямо.

Цель

Целью нашей работы является создание теоретического базиса для анализа метода и его продвижение в новые области применения.

oooooooooooo
ooooo
ooooooo
ooo

ooooo
ooo
ooooooooo
ooooooooo
ooo

Метод конечных суперэлементов Федоренко (1974)

Основные моменты МКСЭ

- МКСЭ основан на декомпозиции полной расчетной области на меньшие подобласти – суперэлементы.
- МКСЭ имеет дело с грубой (суперэлементной) сеткой.
- Данная СЭ сетка заведомо не может разрешить всю локальную сингулярность решения, но ведет к задаче малой размерности.
- Для разрешения локальной сингулярности внутри каждого СЭ отдельно используется тонкая (в случае МКЭ/МКР) сетка. Вспомогательные задачи на тонких сетках могут быть решены независимо.

●○○○○○○○○○○○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○
 ○○○

○○○○○
 ○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○

Вводный пример: уравнение Лапласа

Вводный пример

Уравнение Лапласа:

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = g.$$

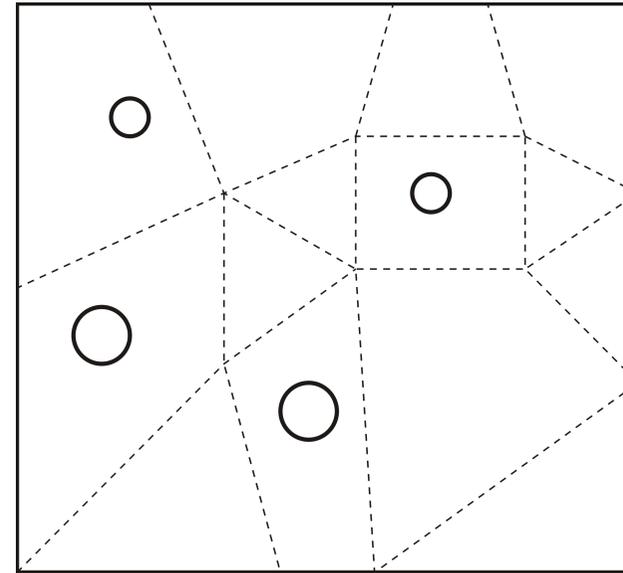


Figure: область и СЭ

Ω представляет собой многосвязную область с малыми
 ”скважинами”

(случай геометрической сингулярности).

$\Omega = \cup_{k=1}^K \Omega_k$, где Ω_k – суперэлементы.



Вводный пример: уравнение Лапласа

Уравнение для следов: уравнение Лапласа

Вариационное уравнение для следов

Формула Грина + операторы П.-С. = вариационное уравнение для следов решения φ на СЭ границах:

$$\varphi \in V_\Gamma : \quad b(\varphi, \psi) = f(\psi), \quad \forall \psi \in V_{\Gamma,0};$$

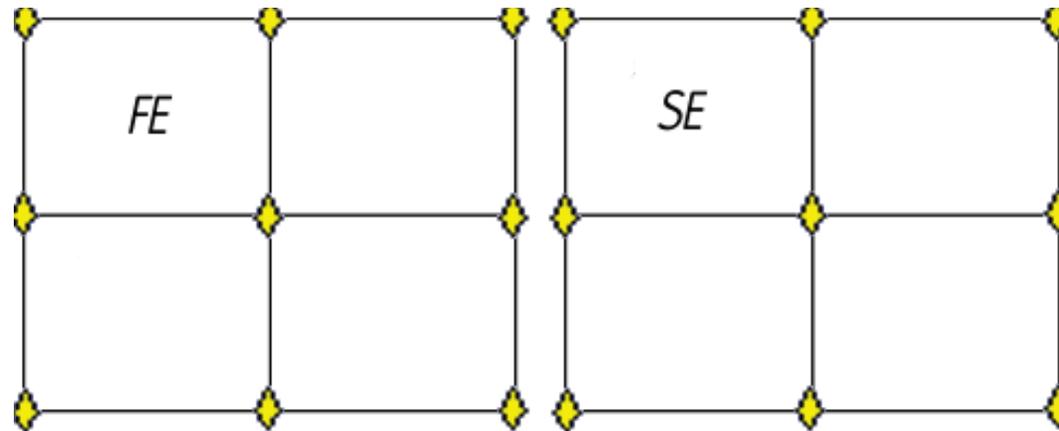
- форма $b(\cdot, \cdot)$ является билинейной, непрерывной и положительно определенной;
- функция φ вводит следы решения на СЭ границах;
- пространства V_Γ и $V_{\Gamma,0}$ вводят подходящие пространства следов и определены на границах СЭ.

○○○○○○○○○○○●○
 ○○○○
 ○○○○○○
 ○○○

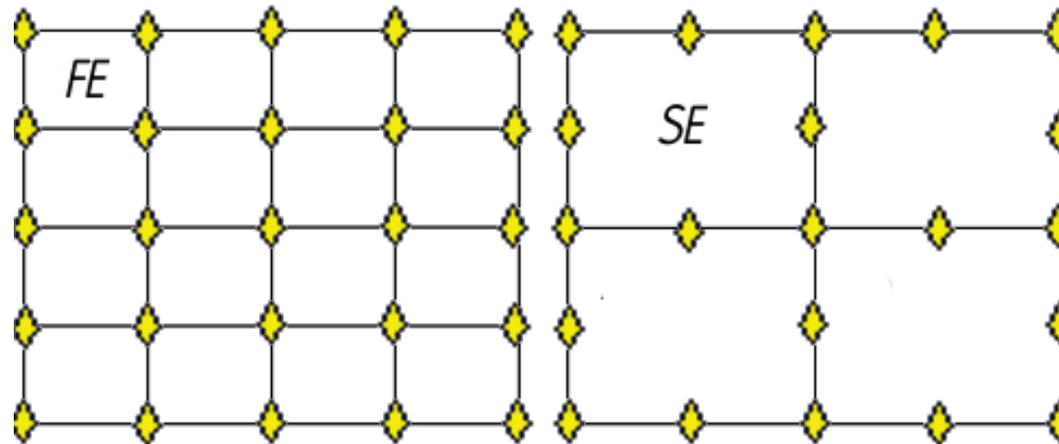
○○○○
 ○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○

Вводный пример: уравнение Лапласа

МКСЭ и МКЭ: различия



$$h = H$$



$$h = H/2$$



Общий случай

- Исходная задача:

$$Au = f \text{ в } \Omega;$$

- Формула Грина:

$$(Au, v)_\Omega = a(u, v)_\Omega + \langle \delta u, \gamma v \rangle_{\partial\Omega},$$

где δ – оператор ”нормальной производной”, γ – оператор взятия следа;

- Оператор Пуанкаре-Стеклова:

$$P : \varphi \mapsto P\varphi = \delta U|_{\partial\Omega},$$

где U обозначает решение задачи

$$AU = 0 \text{ в } \Omega, \quad U|_{\partial\Omega} = \varphi.$$



Общий случай

Примеры

- Оператор Лапласа (рассмотрен выше):

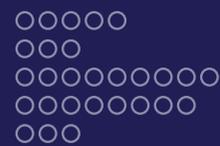
$$A = -\Delta, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega, \quad \delta u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \quad \gamma u = u|_{\partial\Omega}.$$

- Оператор конвекции-диффузии:

$$A = -(\vec{c}_1 \nabla)u + \operatorname{div}(\vec{c}_2 u - \kappa \nabla u) - \lambda u,$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\vec{c}_1 \nabla u \cdot v - u \cdot \vec{c}_2 \nabla v + \kappa \nabla u \cdot \nabla v) \, d\Omega,$$

$$\delta u = (\kappa \nabla u - \vec{c}_2 u) \cdot \vec{n}, \quad \gamma u = u|_{\partial\Omega}.$$



Общий случай

Примеры

- Оператор линейной теории упругости:

$$Au = -\operatorname{div} \sigma(u), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \epsilon(u) \, d\Omega,$$

$$\delta u = \sigma(\vec{u}) \cdot \vec{n}, \quad \gamma \vec{u} = \vec{u}|_{\partial\Omega},$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

○○○○○○○○○○○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○
 ○○○

●○○○
 ○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○

Уравнение Лапласа

Уравнение Лапласа

Постановка задачи:

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = g,$$

$$\Omega = \cup_{k=1}^K \Omega_k.$$

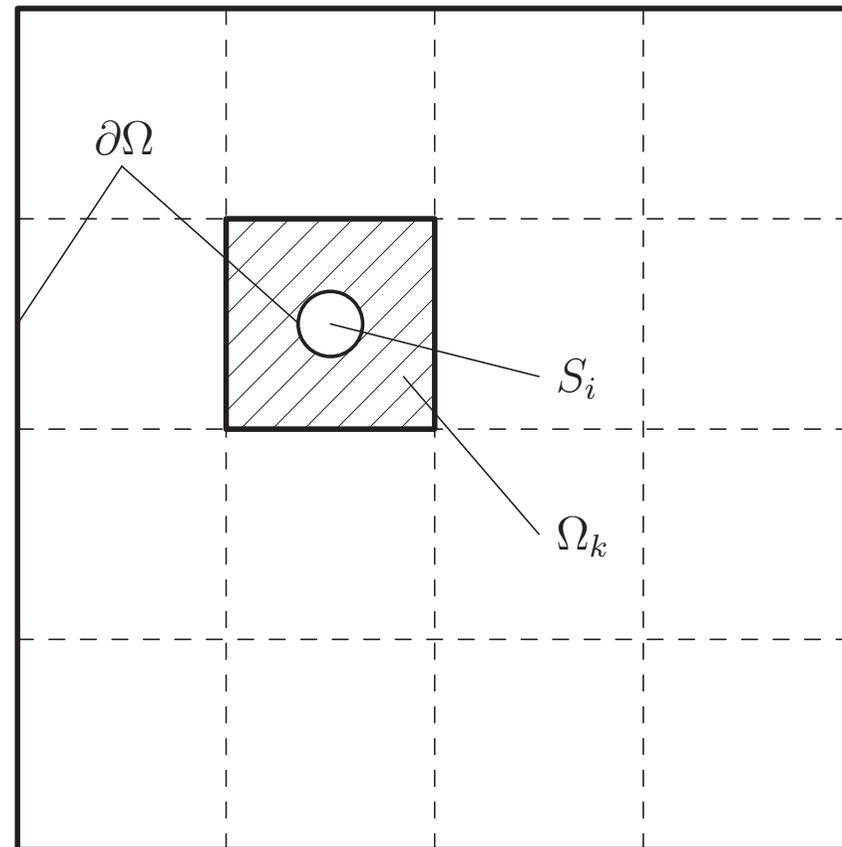
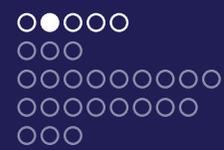


Figure: область и СЭ



Граничные базисные функции

Граничные базисные функции

- полиномы
- тригонометрические
- сплайны
- кусочно-линейные
- ...

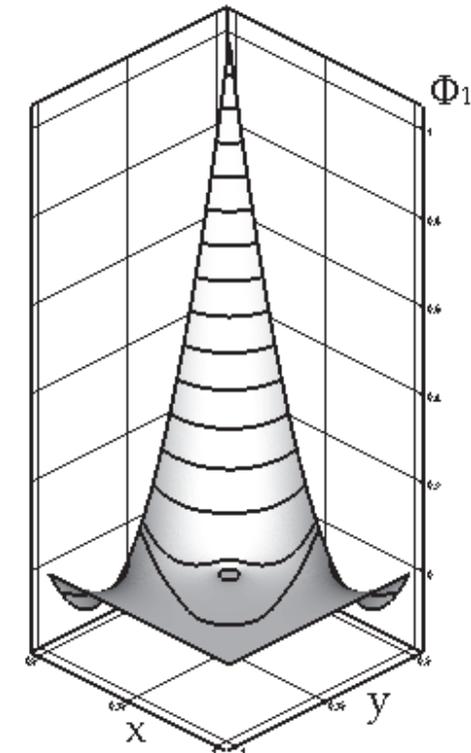
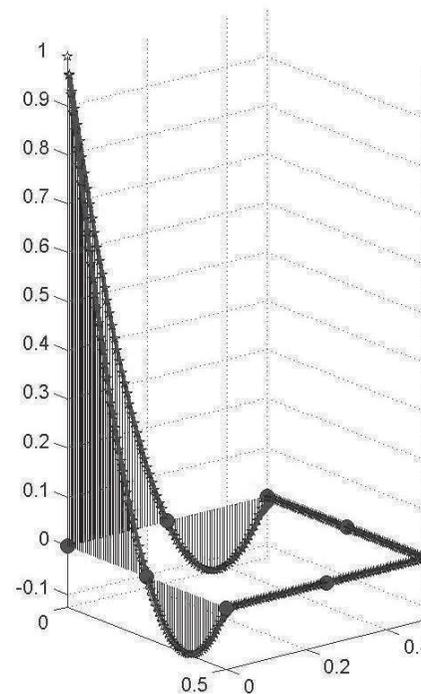
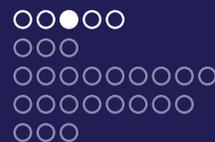


Figure: вид граничных базисных функций и СЭ “базисных” функций

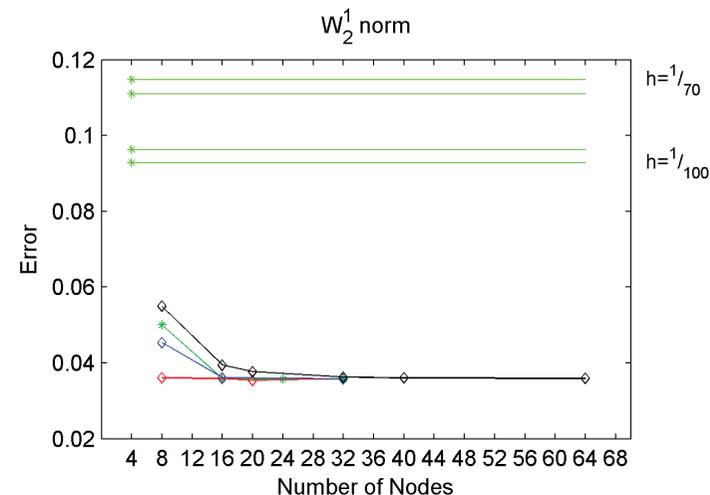
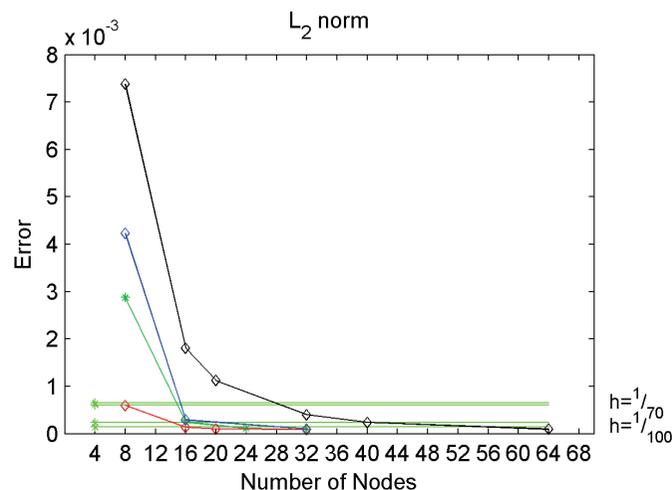
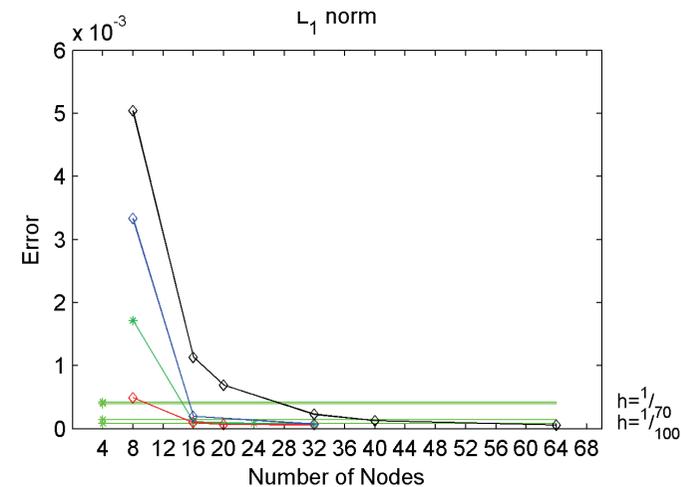
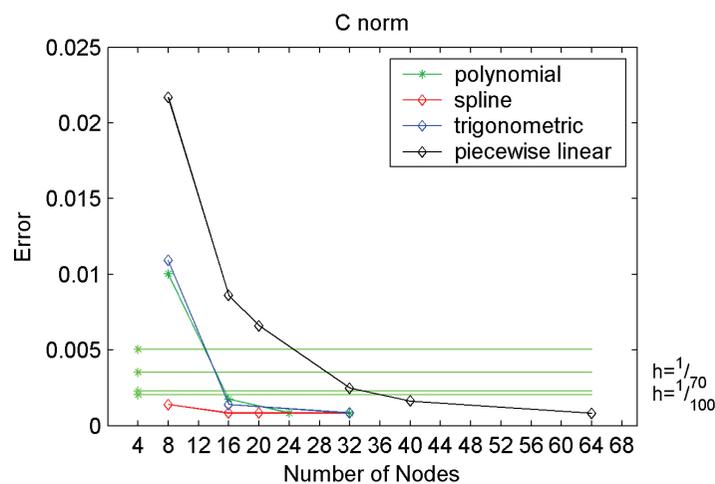


Сходимость, число и размер СЭ фиксированы

Зависимости погрешности МКСЭ от числа узлов гран. сетки.

Различные варианты БФ.

Сравнение МКСЭ и МКЭ



Примеры решений

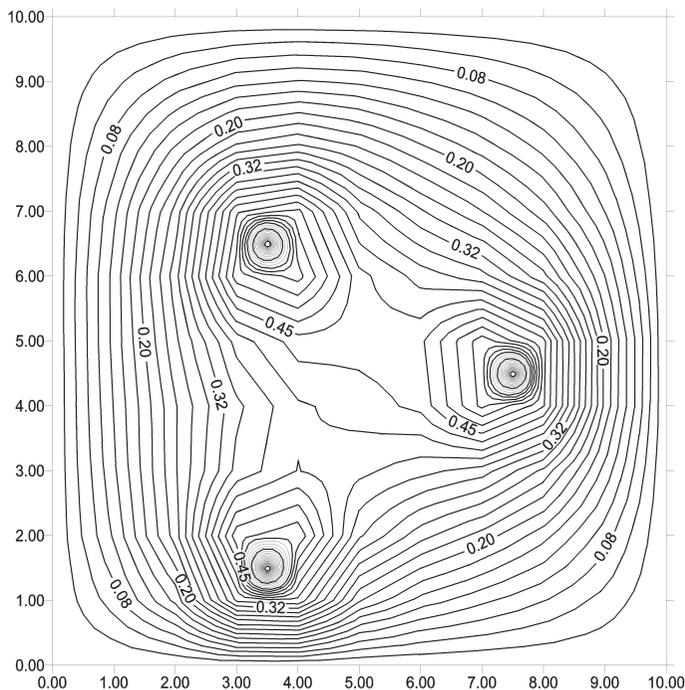


Figure: 3 “скважины”

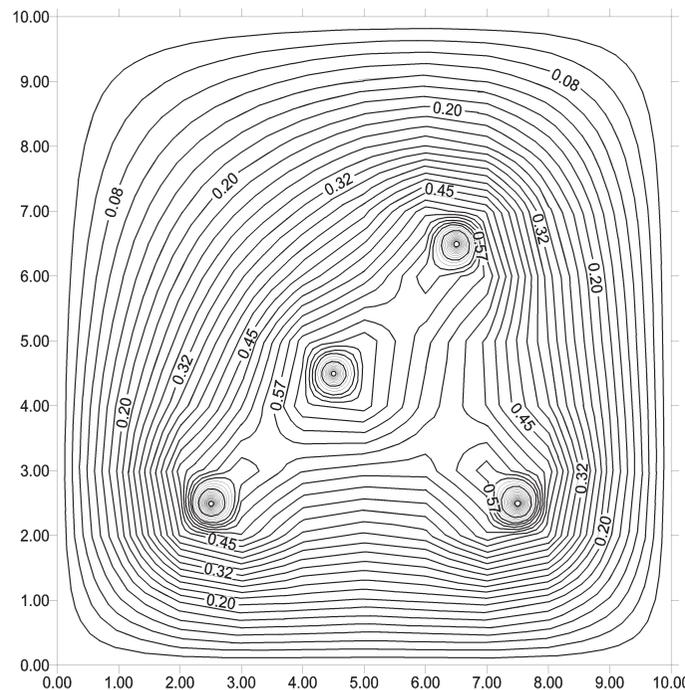


Figure: 4 “скважины”

$$d(\text{скважины})/d(\Omega) = 10^{-2}, \Omega = [0, 10] \times [0, 10], N_{SE} = 10 \times 10.$$

Задачи теории упругости

Постановка задачи:

$$-\operatorname{div} \sigma(\vec{u}) = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\vec{u}|_{\Gamma_1} = \vec{g},$$

$$\sigma(u) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = \vec{f},$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij},$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

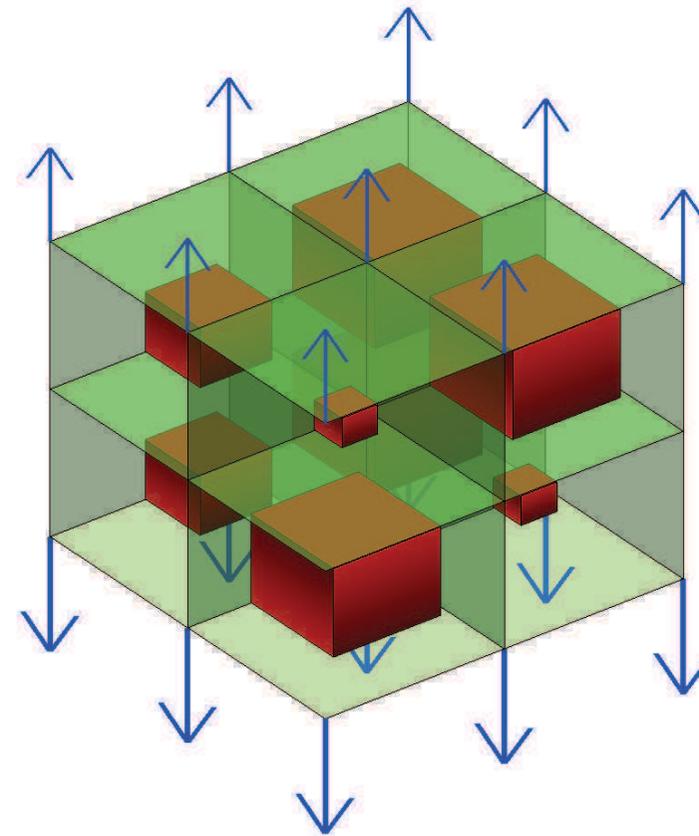
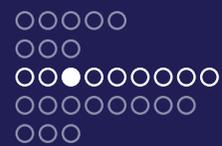
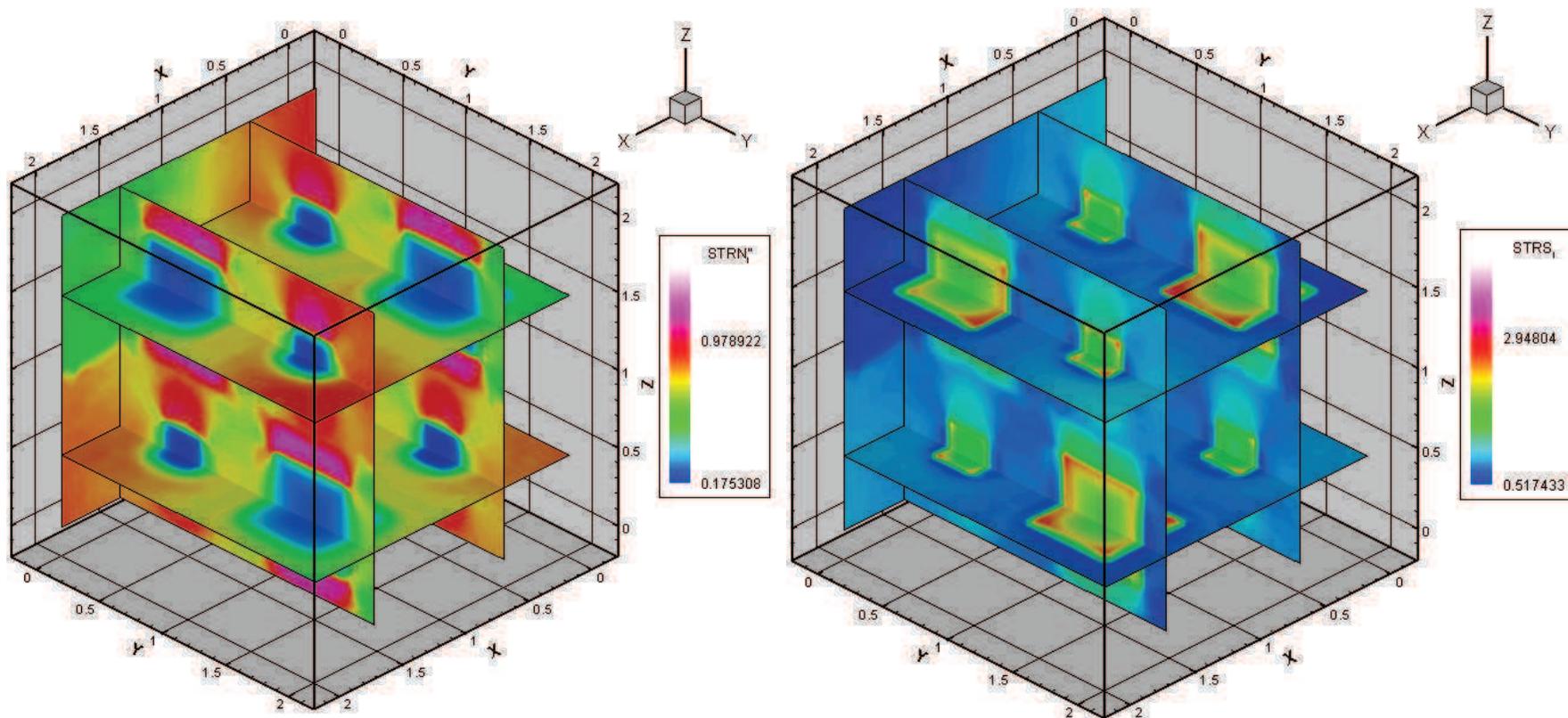


Figure: область и СЭ



Результаты расчетов

Область $2 \times 2 \times 2$ СЭ. 2 типа СЭ (большие и малые кубические включения). Интенсивности деформаций и напряжений.



○○○○○○○○○○○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○
 ○○○

○○○○
 ○○○
 ○○○●○○○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○

Граничные базисные функции

- Граничные базисные функции:

- линейные
- квадратичные
- кубические лагранжевы
- кубические эрмитовы

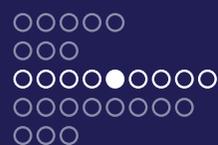
- Параметры моделирования:

- число СЭ граничных узлов на одной СЭ границе: 8 – 500
- число СЭ в расчетной области:

от $2 \times 2 \times 2$ до $15 \times 15 \times 15$

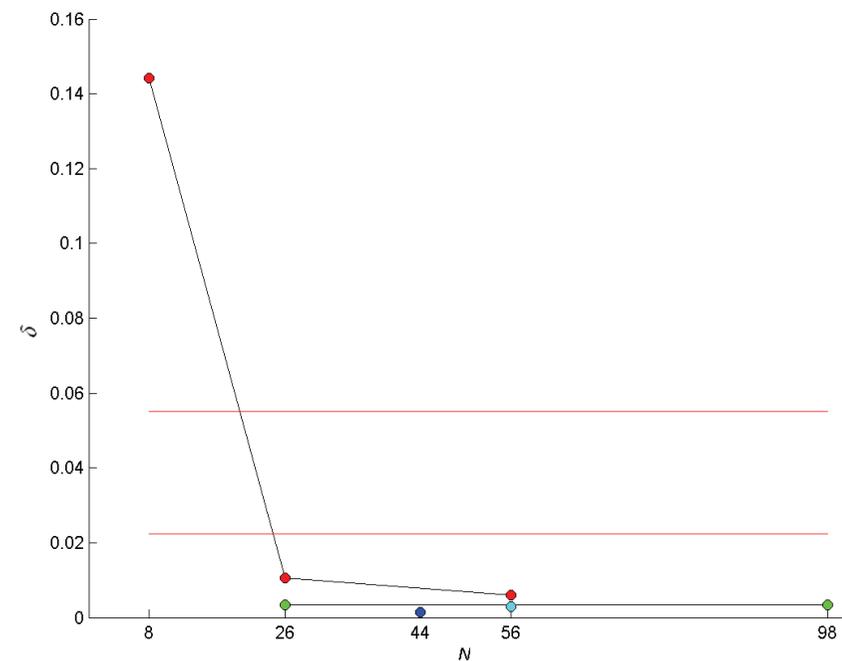
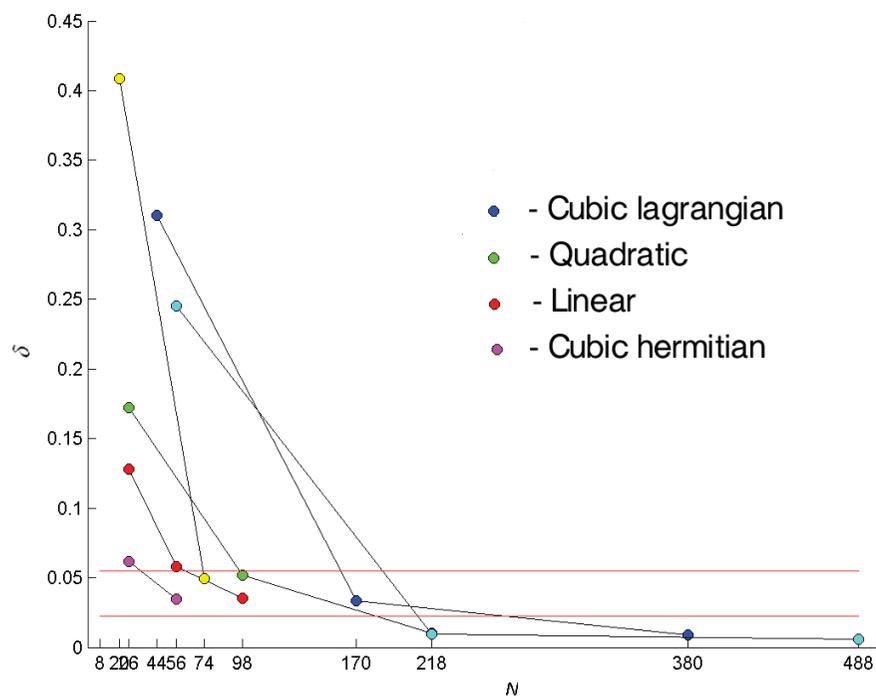
- число точек вспомогательной сетки в одном СЭ: до $1.5 \cdot 10^5$

Итого: до $\sim 10^8$ точек вспомогательной сетки в расчетной области



Относительные ошибки

Зависимости погрешности решения от числа узлов в СЭ (норма С). Различные варианты БФ. Разбиения на 8 и 125 СЭ.



oooooooooooo
ooooo
ooooooo
ooo

ooooo
ooo
ooooooooo
ooooooooo
ooo

Заключение

- Развита алгоритм теоретического анализа МКСЭ. Он обеспечивает единообразную теоретическую базу для анализа метода.
- Главным объектом подхода является вариационное уравнение для следов. Традиционная и хорошо развитая теория могут быть использованы для анализа и исследования приближений метода.
- Выполнено численное исследование метода. Рассмотрен ряд 2d и 3d задач. Метод продемонстрировал свою эффективность и устойчивость.

Математическое моделирование канализированных радиационно ускоренных выбросов

М.П. Галанин, В.В. Лукин,
В.М. Чечеткин, К.Л. Шаповалов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Цель работы

- а) построение и исследование методами вычислительного эксперимента математической модели образования, коллимации и ускорения плазменного струйного выброса из окрестностей компактного объекта, окруженного аккрецирующим веществом, с учетом газодинамических, магнитных, гравитационных и радиационных эффектов;
- б) разработка численных методов и их реализация в виде программного комплекса для моделирования ускорения джетов в магнитогидродинамической и радиационной магнитогидродинамической постановках.

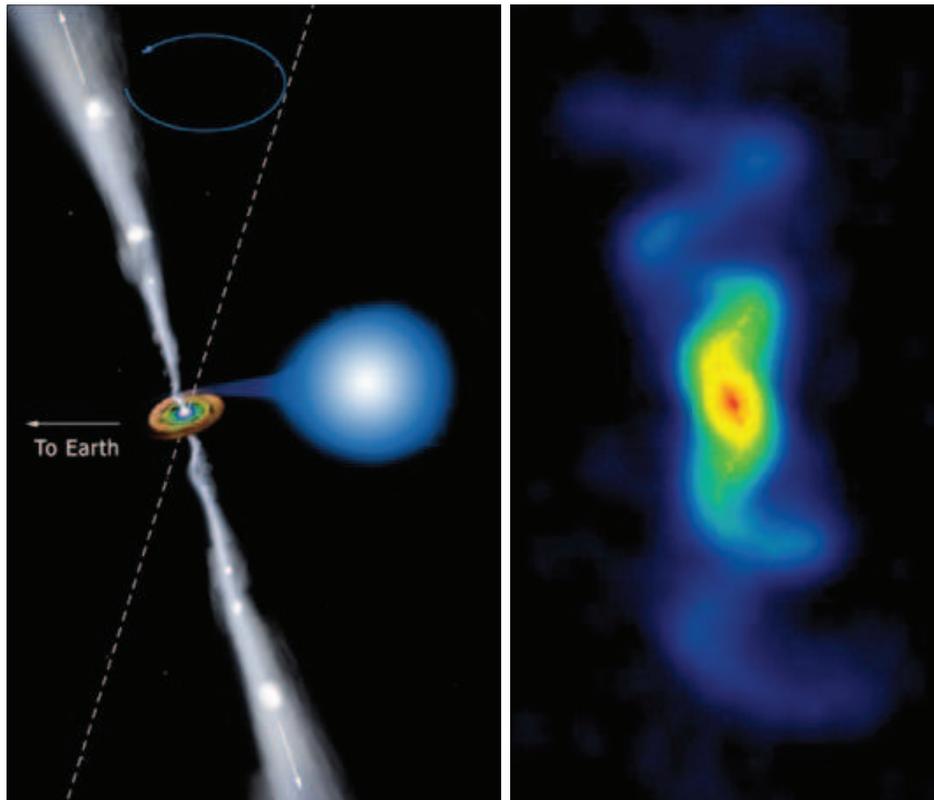
Объект математического моделирования

Астрофизические струйные выбросы

Джеты объекта SS433 (1977)

$V_{out} \approx 0.26c$, $L = 3 \cdot 10^{11}$ км.

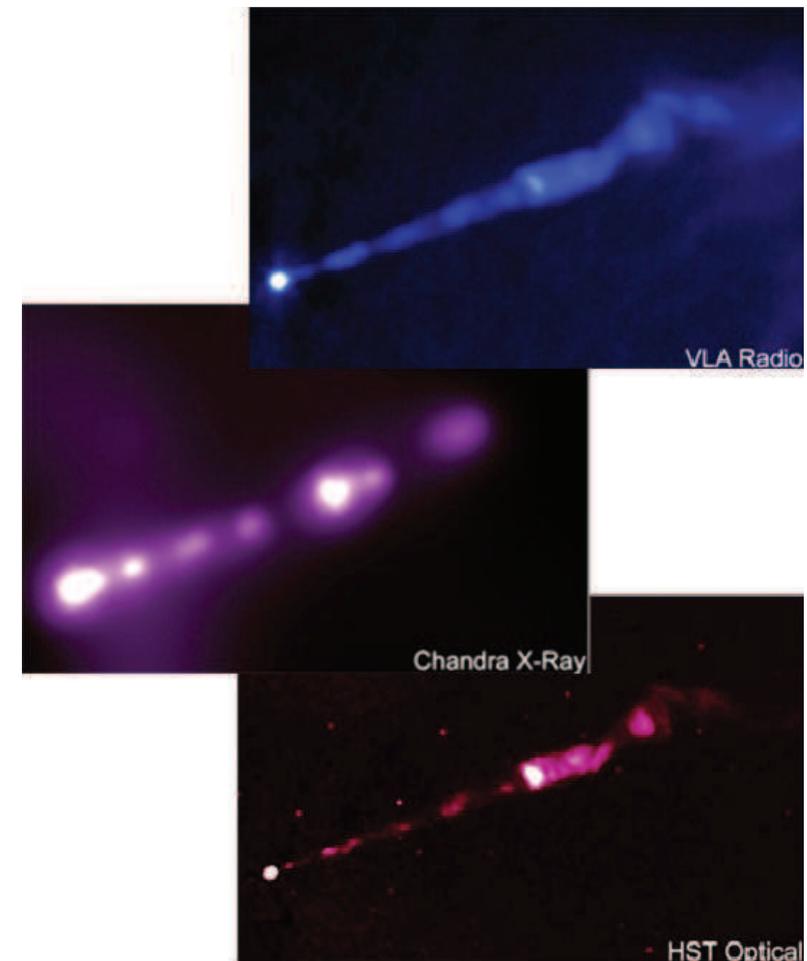
Рисунок и результаты наблюдений в радиодиапазоне.



Джеты галактики M87 (1918)

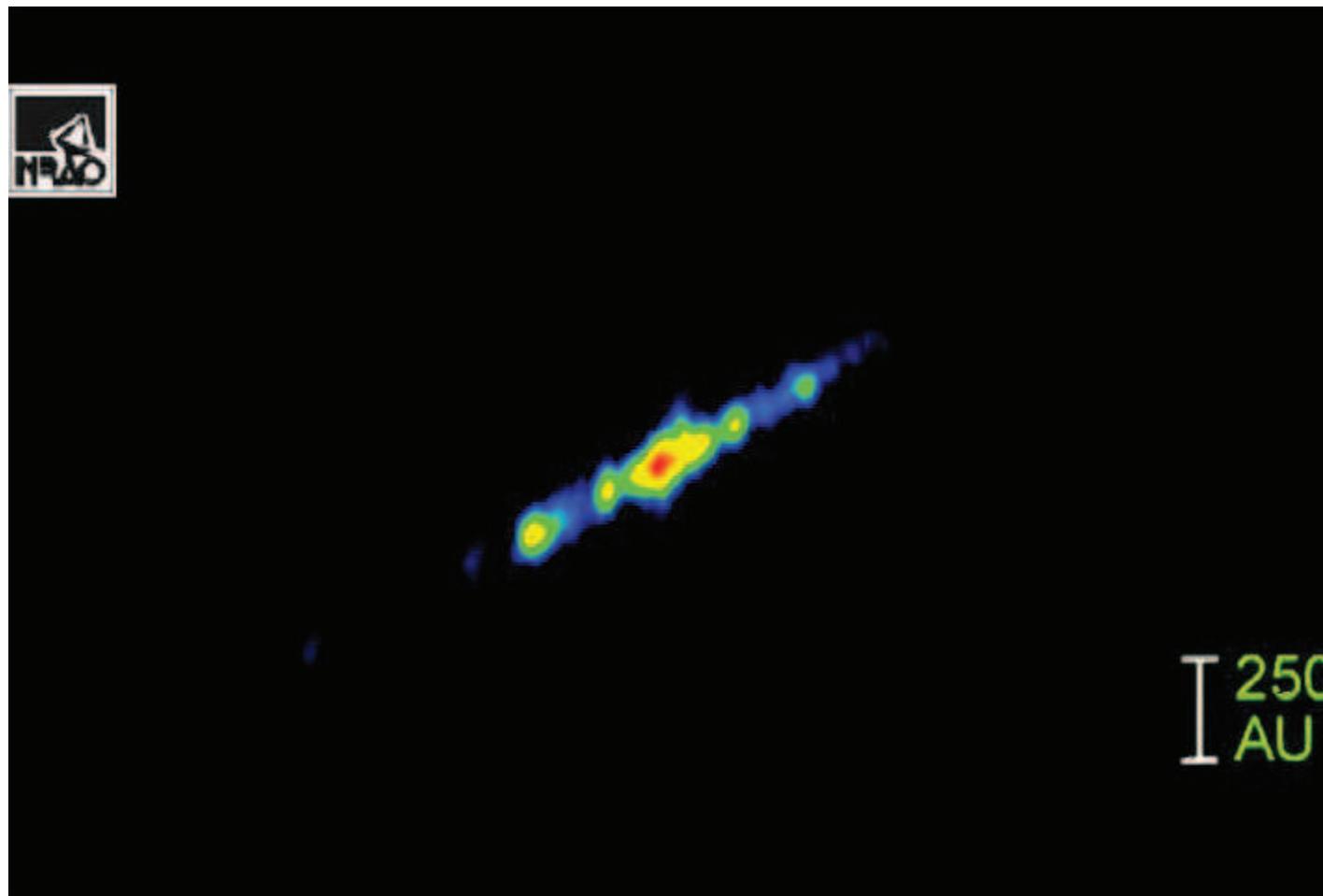
$V_{out} \approx 0.8-0.9c$, $L = 5 \cdot 10^{16}$ км.

Радио, рентгеновские и оптические наблюдения.



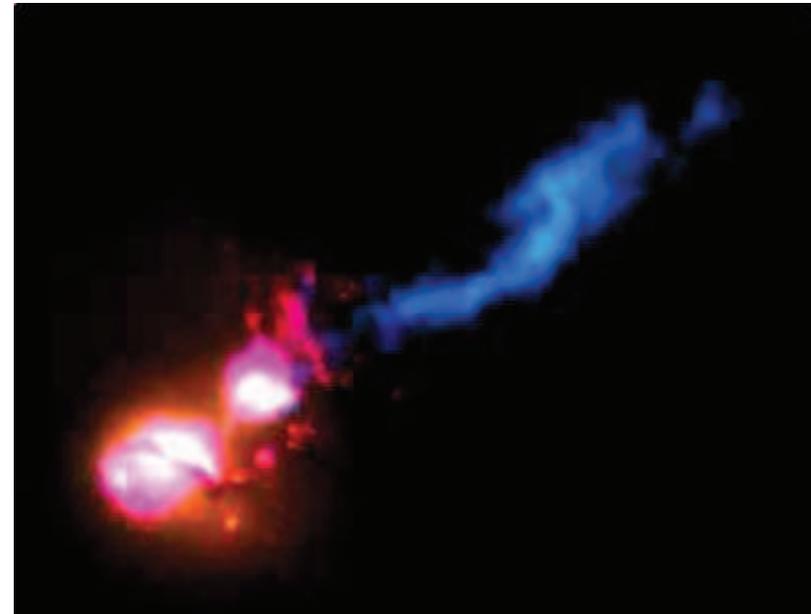
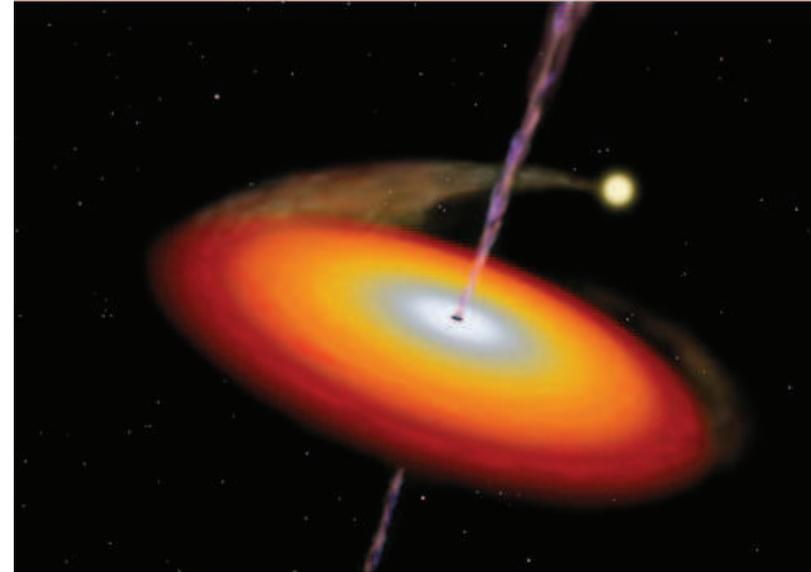
Объект SS433: выброс сгустков

Результаты наблюдений на телескопе VLBA
(Mioduszewski, Rupen, Walker, & Taylor 2004)



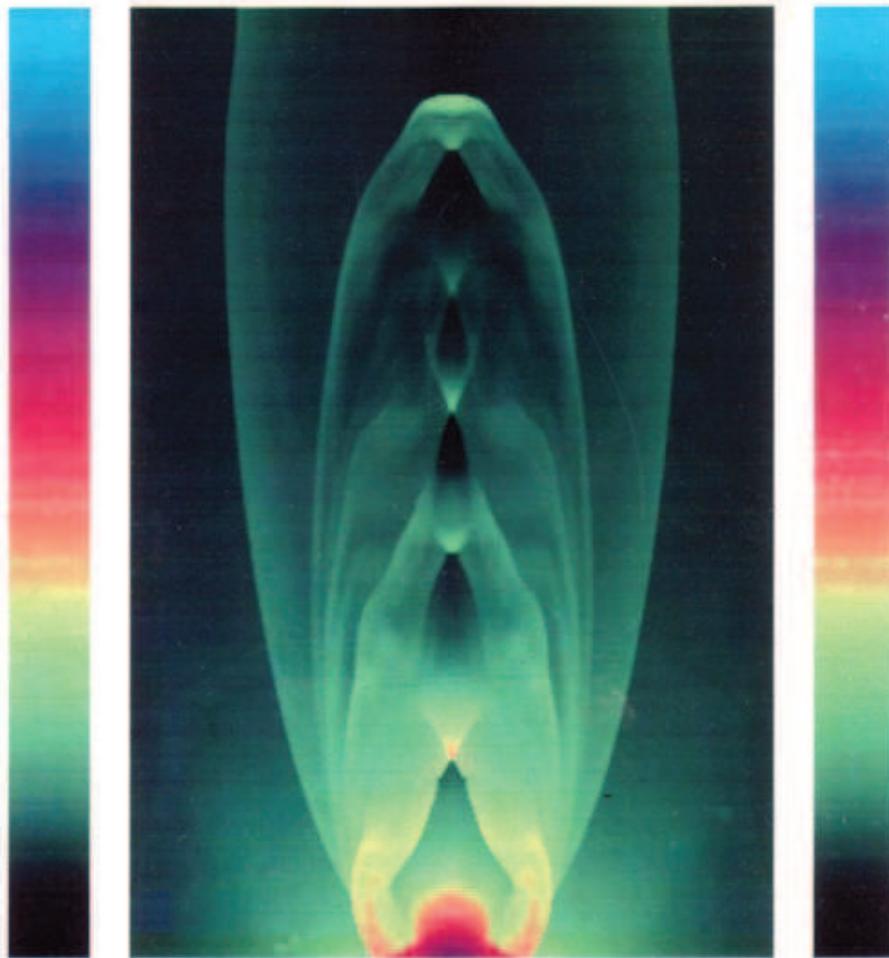
Основные свойства

- Широкий спектр объектов (ядра активных галактик, микроквазары).
- Высокая энергетика выброса, субсветовые скорости вещества.
- Поток хорошо коллимирован ($\alpha \approx 10^\circ$), его структура сохраняется на больших расстояниях.
- Поток в основном состоит из сгустков, выбрасываемых более-менее периодически.



Пути построения моделей джета

Магнитная коллимация потока: результаты

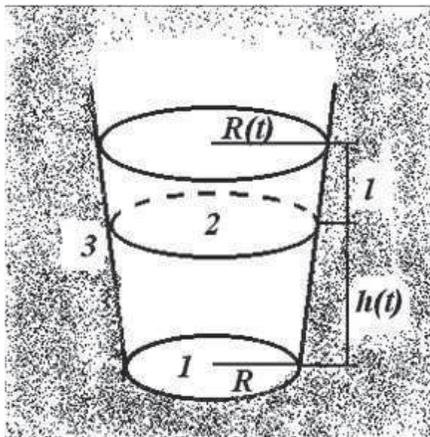


Результаты

- Вдоль оси вращения системы формируется ускоряющий канал.
- Плазма может проникать внутрь этого канала, она — источник вещества для джета.
- Получен ряд разрывов плотности плазмы, распространяющихся вдоль оси вращения системы.

Ускорение вещества давлением излучения

М.П. Галанин, Ю.М.Торопин, В.М. Чечеткин. "Радиационное ускорение порций вещества в аккреционных коронах около астрофизических объектов". *Астрономический журнал*, 1999г., т.76, стр.143-160.



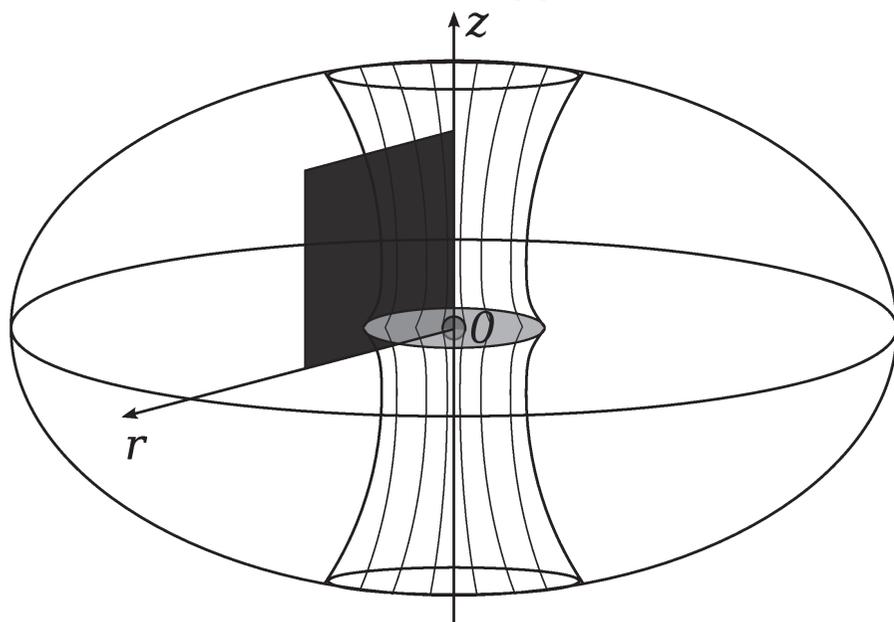
- Рассмотрена нуль-мерная модель, включающая ОДУ динамики сгустка в поле излучения центрального объекта.
- Существование канала с горячим дном создает условия для эффективного ускорения излучением и вывода из системы сгустков вещества.

Максимальные скорости сгустков в коническом канале
(в зависимости от угла β и коэффициента поглощения r)

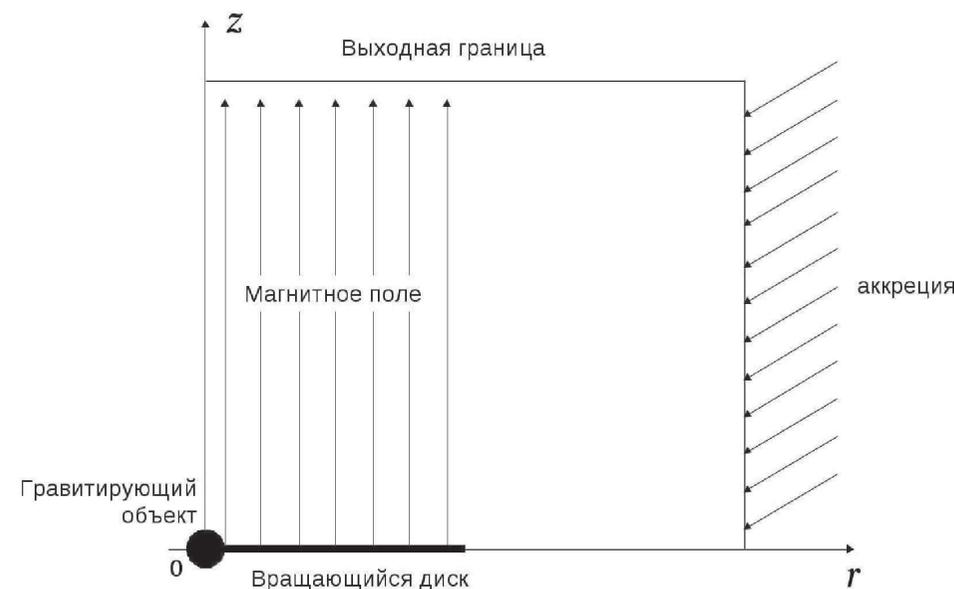
	$\beta = 0$	$\beta = 3$	$\beta = 5$	$\beta = 10$
$r_2 = 0.0$	0.456	0.486	0.506	0.556
$r_2 = 0.4$	0.532	0.570	0.595	0.648
$r_2 = 0.8$	0.652	0.697	0.721	0.763
$r_2 = 0.9$	0.700	0.745	0.765	0.800

Схема 2.5-мерной модели

Схема модели



Расчетная область



Две модельных задачи

- 1 Образование замагниченного канала и коллимация выброса — МГД-задача.
- 2 Радиационное ускорение плазмы в канале — РМГД-задача.

МГД модель образования канала

Система уравнений идеальной МГД

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + p \hat{I}) = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{F}_g,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} (e + p)) = \frac{1}{4\pi} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \cdot \vec{v} + \vec{F}_g \cdot \vec{v},$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}).$$

$$\vec{v} = (v_z, v_r, v_\varphi)^T, \quad \vec{B} = (B_z, B_r, B_\varphi)^T, \quad e = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{|\vec{v}|^2}{2}.$$

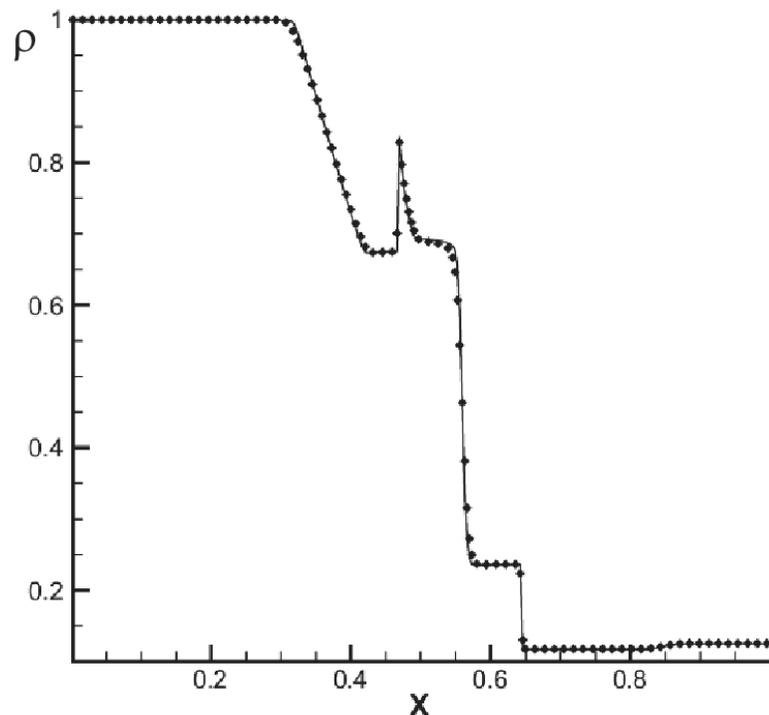
Гравитационная сила:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = -G \frac{M\rho}{R^2} \frac{\vec{r}}{R}, & R = \sqrt{r^2 + z^2} > r_c, \\ \vec{F}_g = -G \frac{M\rho}{r_c^2} \frac{\vec{r}}{R}, & R \leq r_c. \end{cases}$$

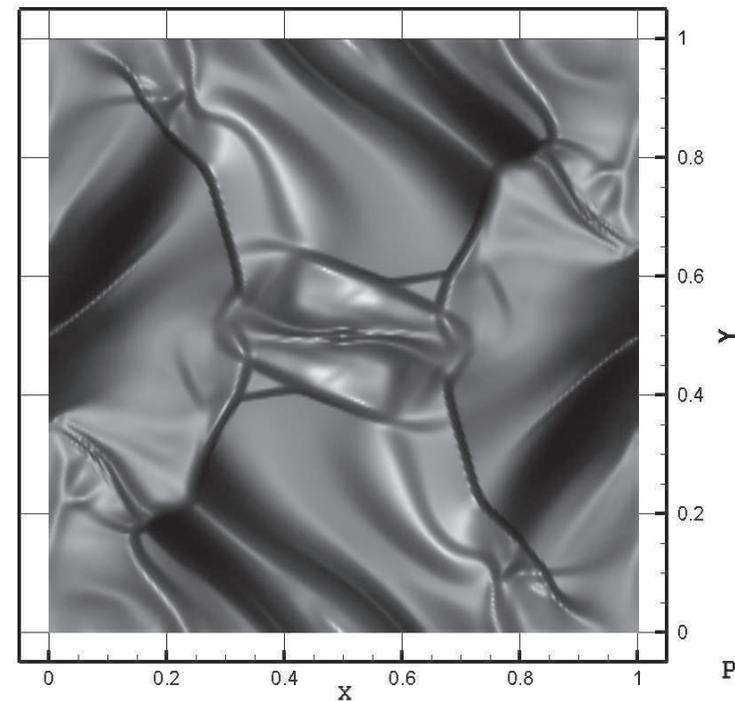
Тестирование численного МГД-кода

Программный комплекс

- Язык программирования Фортран-90;
- OpenMP — распараллеливание для машин с общей памятью;
- Построение сеток — ПК Gridder 2D (И.А. Щеглов, 2008).



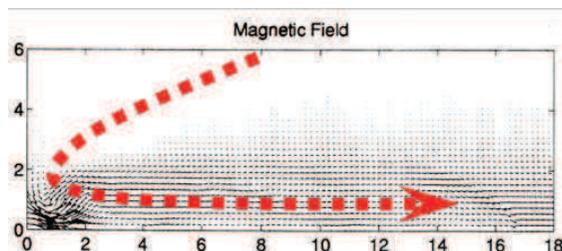
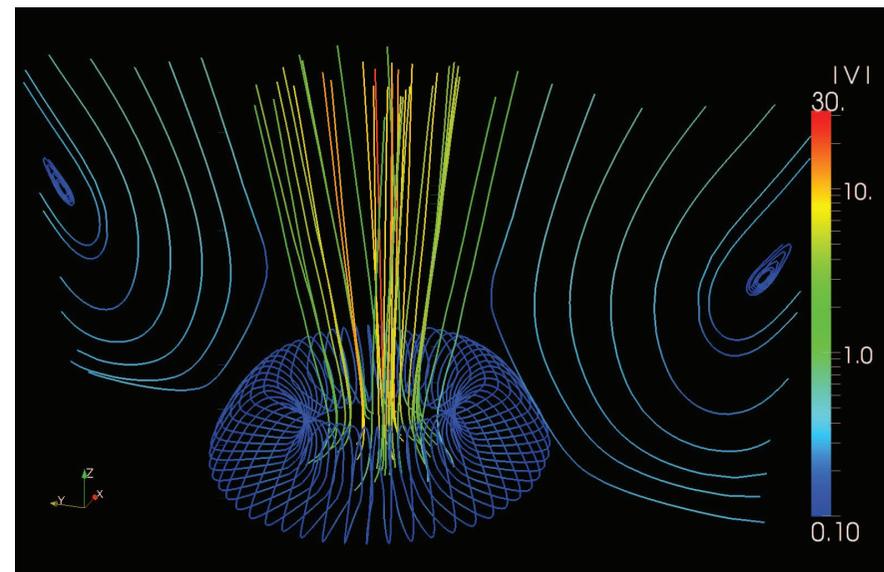
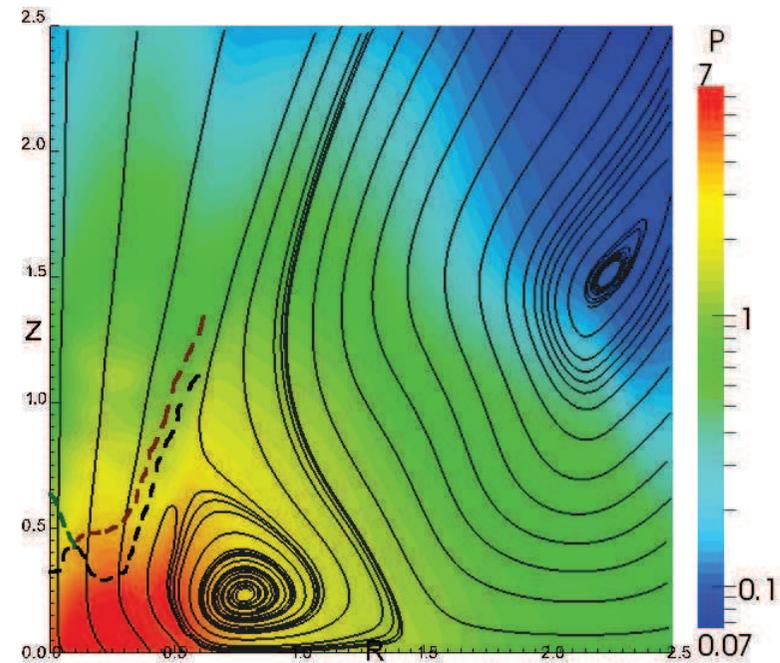
Тестовая задача Brio & Wu



Вихрь Орзага-Танга

Давление и мгновенные траектории

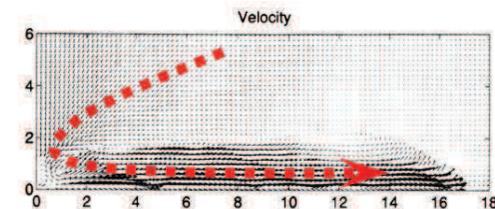
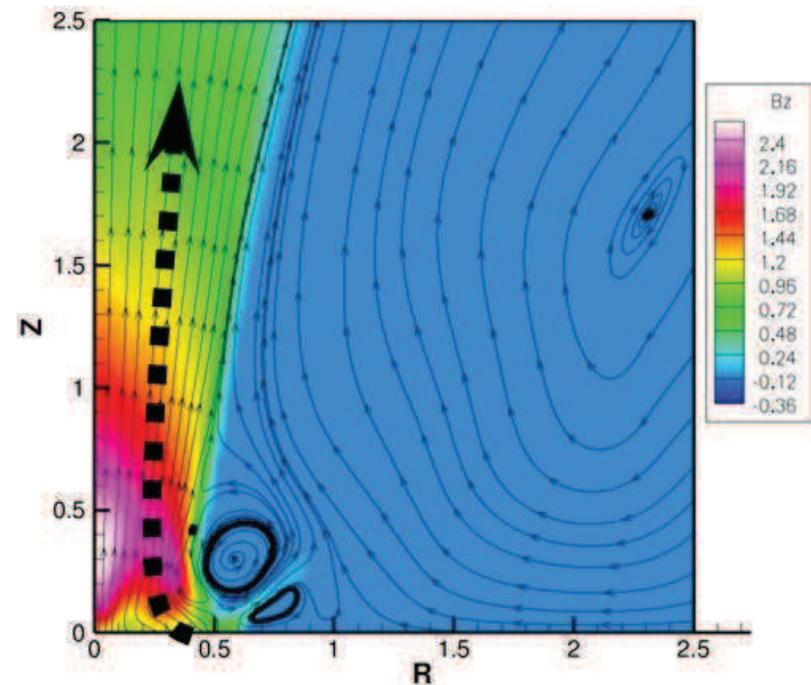
- Джет хорошо коллимирован: канал имеет форму конуса с нелинейной образующей, угол наклона которой к оси Oz составляет порядка 10° .
- Поток ускоряется без разрывов. Форма канала аналогична форме аэродинамического сопла Лаваля.
- Преодолевается быстрая магнитная звуковая скорость.



Осевое магнитное поле и мгновенные траектории

- Канал, сдерживаемый магнитным полем, устойчив, его характеристики слабо меняются со временем.
- Стенки канала оптически толстые — состоят из ненамагниченной плазмы высокой плотности.
- Газ внутри канала сильно разрежен и хорошо проницаем для излучения. Для томпсоновского рассеяния:

$$\tau = \sigma_T n L \approx 6.7 \cdot 10^{-4}.$$



Радиационная МГД задача

Система уравнений радиационной МГД

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v} + \vec{G})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + p \hat{I} + \hat{T}) = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{F}_g,$$

$$\frac{\partial (e + U)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} (e + p) + \vec{W}) = \frac{1}{4\pi} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \cdot \vec{v} + \vec{F}_g \cdot \vec{v},$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}),$$

$$\vec{\omega} \cdot \nabla I(t, \vec{x}, \vec{\omega}) + k(t, \vec{x}) I(t, \vec{x}, \vec{\omega}) = \beta(t, \vec{x}) \underbrace{\int_{\Omega} \Gamma(t, \vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\omega}') I(t, \vec{x}, \vec{\omega}') d\omega'}_{S(t, \vec{x}, \vec{\omega})}.$$

$$T_{ik} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \omega_i \omega_k I d\vec{\omega}, \quad \vec{W} = \int_{\Omega} \omega I d\vec{\omega} = c^2 \vec{G}, \quad U = \frac{1}{c} \int_{\Omega} I d\omega,$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{|\vec{v}|^2}{2}.$$

МДН: особенности численной реализации

Наиболее вычислительно тяжелая операция — вычисление интеграла рассеяния

$$S(t, \vec{x}, \vec{\omega}) = \int_{\Omega} \Gamma(t, \vec{x}, \vec{\omega}, \vec{\omega}') I(t, \vec{x}, \vec{\omega}') d\omega'.$$

Интегралы в разных пространственных точках вычисляются независимо, управляющие конструкции отсутствуют \Rightarrow вычисления на графических ускорителях (nVidia CUDA):

$$S_i^j = \sum_{k=1}^{N_\omega} \Gamma(\vec{x}, \vec{\omega}_j, \vec{\omega}'_k) I_i^k \Delta\Omega_k,$$

- $I_i^k, \{\vec{\omega}_k\}$ — подгружаются в быструю память один раз для данной пространственной точки \vec{x}_i ;
- вычисление S_i^j в данной точке для данного направления производится в рамках одного треда.
- i — номер пространственной точки — ассоциируется с номером блока тредов;
- j — номер дискретного направления — ассоциируется с номером треда в блоке.

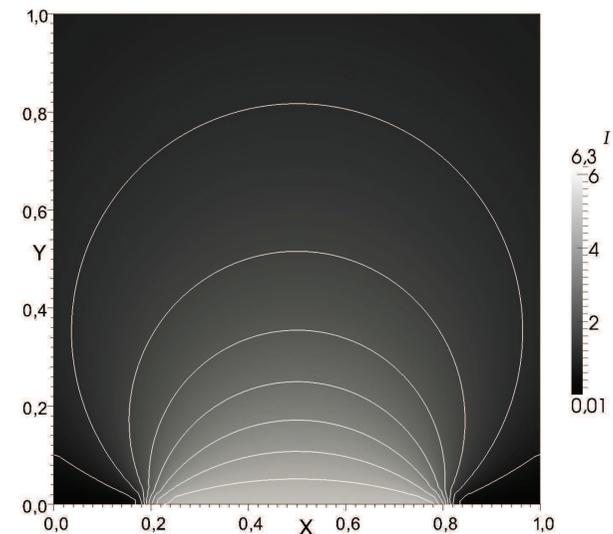
Эффективность

- Достигнуто ускорение исполнения процедуры в 80 раз относительно CPU.

Программный комплекс

- Языки: Фортран-90 и C++.
- УПИ интегрируется вдоль протрассированных лучей на каждом слое по времени. Трассировка лучей производится один раз в начале расчета и хранится в памяти (60 Гб).
- Комплекс для гибридных систем с общей памятью:
 - технология OpenMP — параллельный расчет интенсивности излучения в разных точках расчетной сетки;
 - технология CUDA — параллельный расчет источников рассеяного излучения в разных точках расчетной сетки.
- Вычисления производились на смешанном кластере К-100 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

МДН с дискретизацией „от границы“

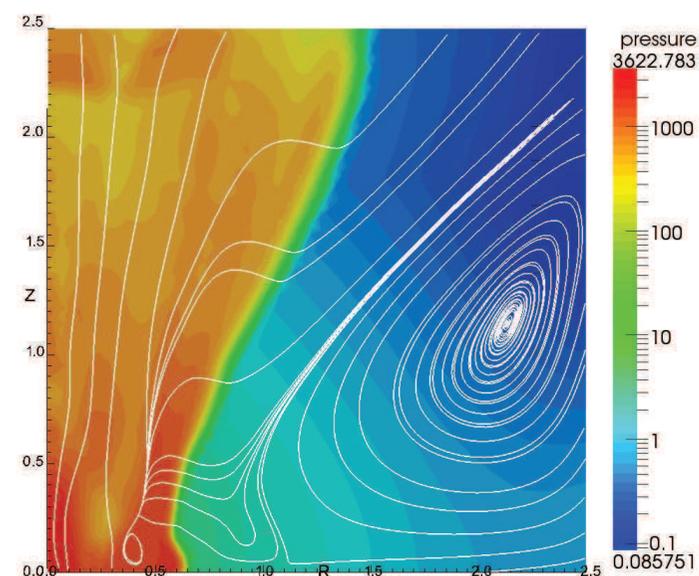
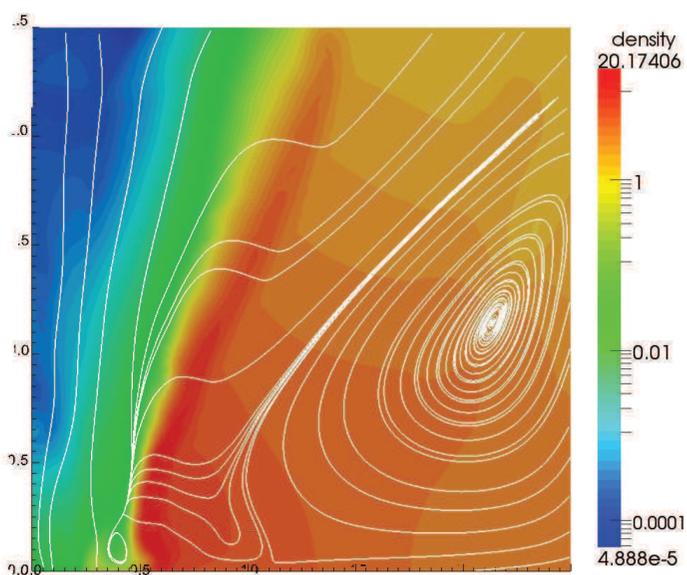
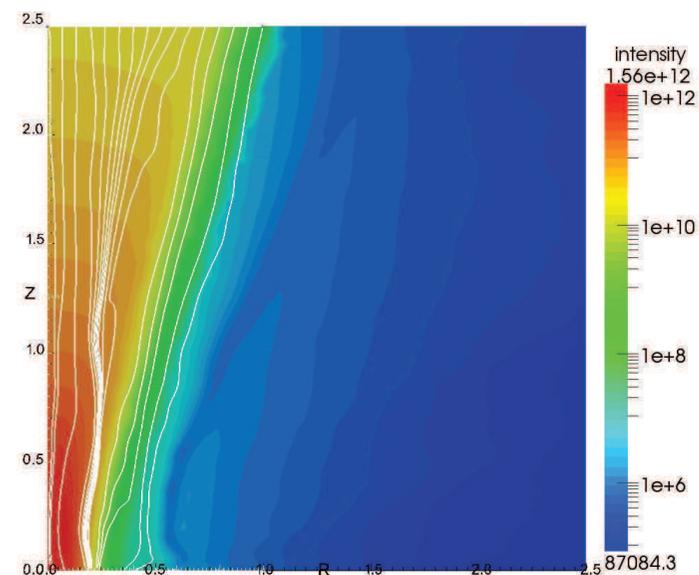


Затраты ресурсов на трассировку

Метод	Память, Мб	Время, мс
Г-МДН	187	17921
Т-МДН	196	39351
МДН S_{24}	197	40356
МДН S_{24} OpenMP/12	207	3734 (×10.8)

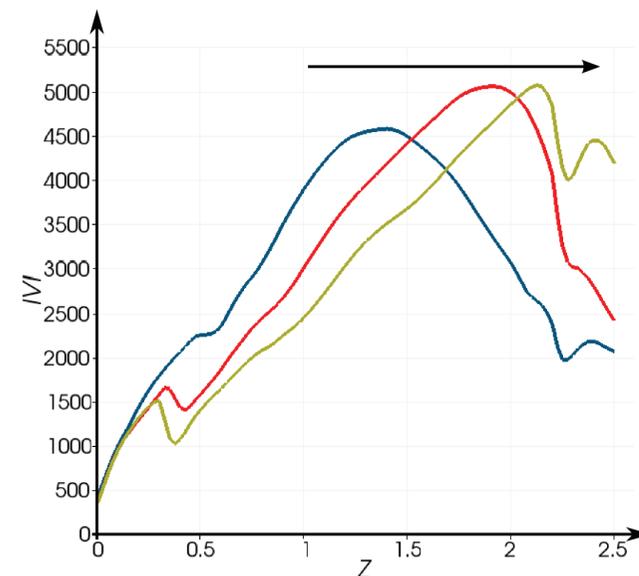
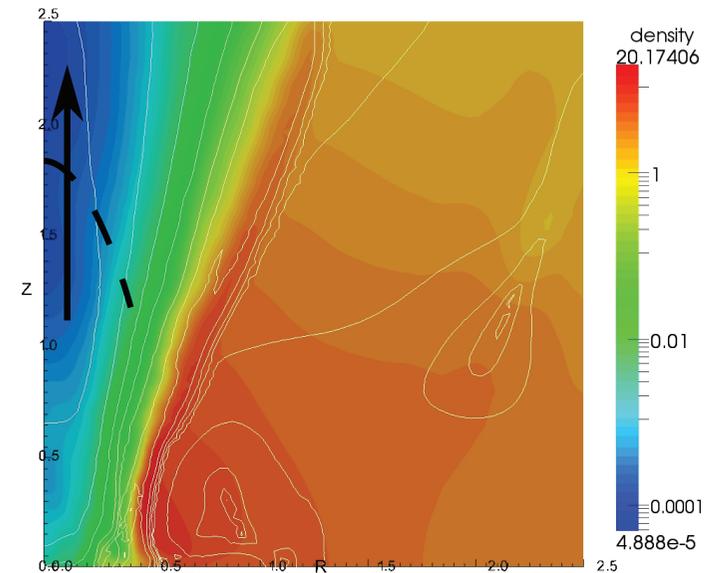
Результаты расчетов: ускорение выброса

- Выброс (джет) эффективно ускоряется излучением до $1/5c$;
- Поток остается хорошо коллимированным благодаря фокусировке излучения внутри канала.



Результаты расчетов: всплески скорости порождают сгустки в потоке

- Над диском периодически образуются всплески скорости.
- Быстро движущаяся плазма "нагребает" вал из более медленно движущегося газа.
- Джет состоит из периодически выбрасываемых сгустков.



Пример размерных параметров задачи

Концентрация вещества	$n_0 = 10^8 \text{ см}^{-3}$
Линейный размер задачи	$L = 10^{15} \text{ см}$
Напряженность магнитного поля	$B_0 = 0.06 \text{ Э}$
Масштаб температуры	$T_0 = 200 \text{ К}$
Масса центрального тела	$M = 3M_{\odot}$
Радиус тонкого диска	$R_d = 0.6L_0 \approx 40 \text{ а.е.}$
Температура излучающего тела	$T_i = 7 \cdot 10^4 \text{ К}$
Временной масштаб задачи	$t_0 = 1.12 \times 10^9 \text{ с}$
Период образования сгустков	$t_b = 13 \text{ дней}$
Масштаб скорости	$V_0 = 0.9 \times 10^6 \text{ см/с}$
Скорость потока на выходе из расчетной области ($L_{out} \approx 167 \text{ а.е.}$)	$V_{out} \approx 5 \times 10^4 \text{ км/с}$

Параллельный алгоритм RKDG метода

Цель: создание эффективного численного метода для решения системы уравнений двумерной магнитной гидродинамики.

Характеристики:

- Разрывный метод Галеркина второго порядка по пространству и времени
- Высокий уровень разрешения разрывов
- Бездивергентное магнитное поле
- Технология параллельного программирования MPI
- Масштабируемость
- Треугольные неструктурированные сетки

Система нестационарных уравнений идеальной магнитной гидродинамики

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \quad \text{– закон сохр. массы} \\ \frac{\partial \rho v_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho v_1 v_j - \frac{B_1 B_j}{4\pi} + \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) \delta_{1j} \right) = 0, \\ \frac{\partial \rho v_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho v_1 v_j - \frac{B_2 B_j}{4\pi} + \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) \delta_{2j} \right) = 0, \quad \text{– закон сохр. импульса} \\ \frac{\partial \rho v_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho v_1 v_j - \frac{B_3 B_j}{4\pi} + \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) \delta_{3j} \right) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(e + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) v_j - B_j \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{4\pi} \right) = 0, \quad \text{– закон сохр. энергии} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = 0. \quad \text{– уравн. Фарадея} \end{array} \right.$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0,$$

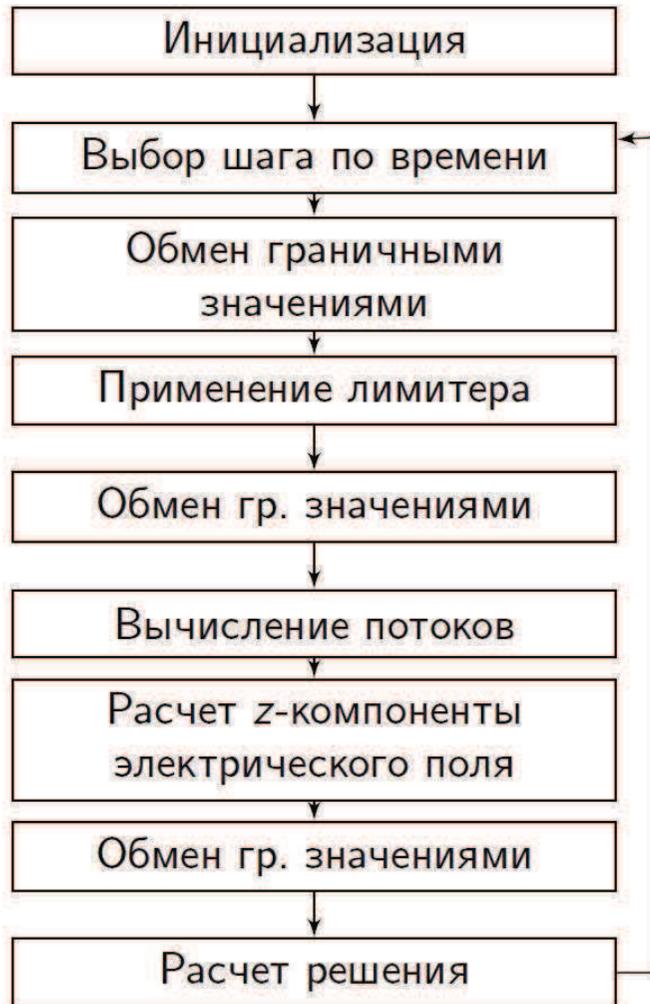
$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon.$$

– отсутствие магн. заряда

– уравнение сост. сов. газа

Обозначения традиционные

Параллельный алгоритм с использованием технологии MPI



Основные подходы:

- Разбиение сетки на подобласти по числу вычислительных модулей



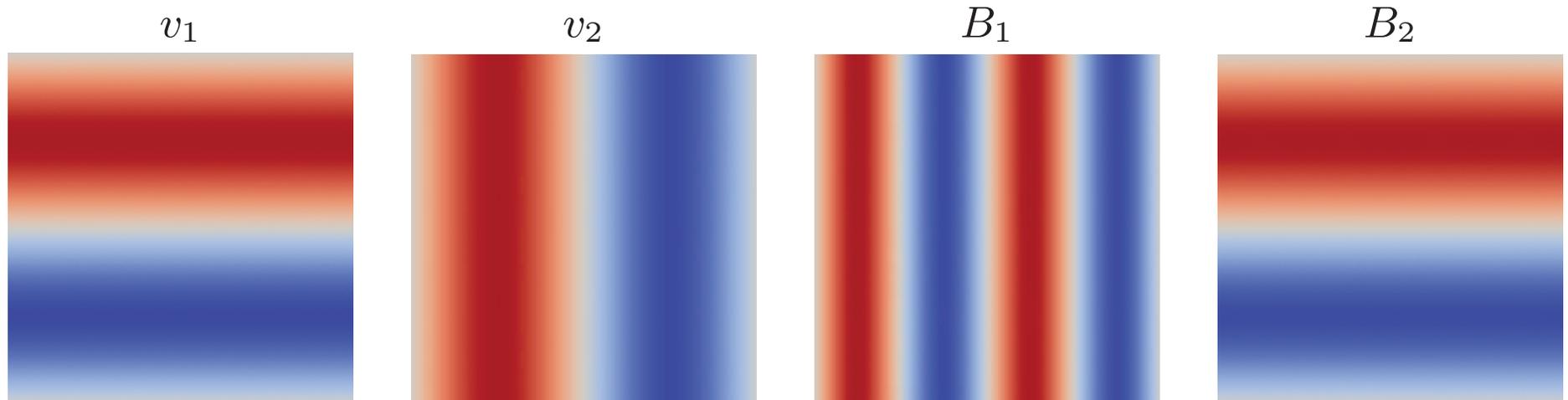
- Перенумерации узлов и ячеек сетки в подобласти
- Отложенные передача и прием данных
- Буферизованная запись на диск результатов расчета

Тестовая задача: Вихрь Орзага-Танга

Начальные данные

$$\begin{aligned}
 (\rho, v_1, v_2, v_3, p, B_1, B_2, B_3) = \\
 = \left(\frac{25}{36\pi}, -\sin 2\pi x_2, \sin 2\pi x_1, 0, \frac{5}{12\pi}, -\sin 2\pi x_2, \sin 4\pi x_1, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Граничные условия: периодические



Вихрь Орзага-Танга: Тестирование параллельного алгоритма

Гибридный вычислительный кластер К-100 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН:

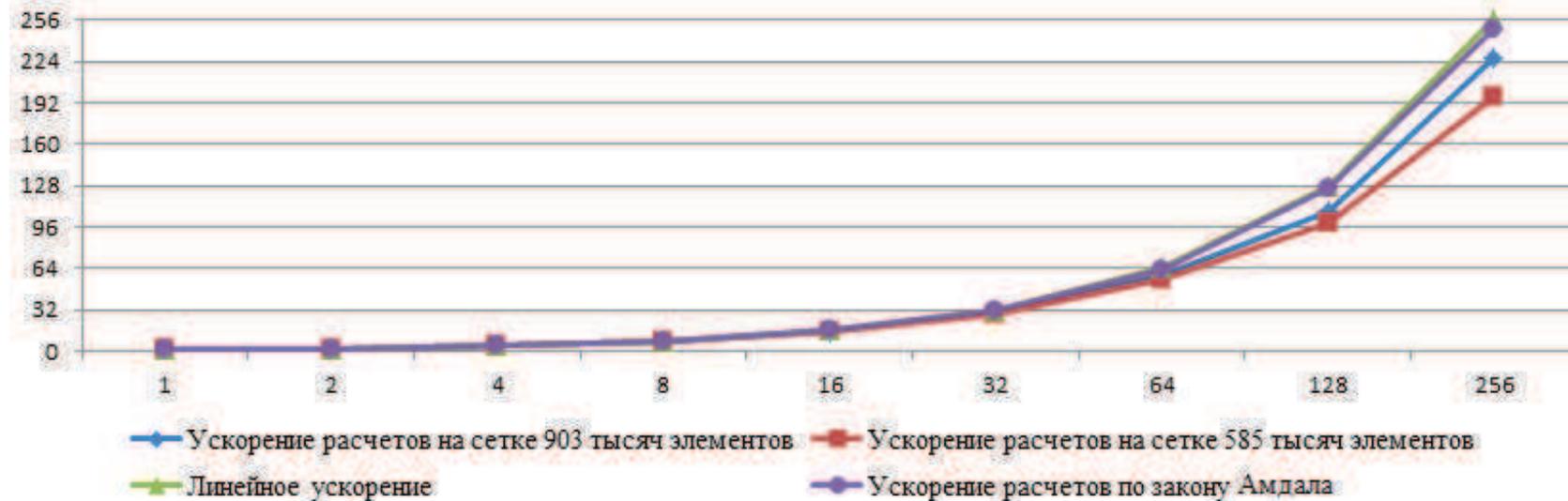
- Состоит из 64 вычислительных узлов.
- Вычислительный узел: 2 процессора Intel Xeon X5670 (6 ядер на процессор)

Тестирование ускорения на двух сетках в задаче о вихре Орзага-Танга на 256 ядрах

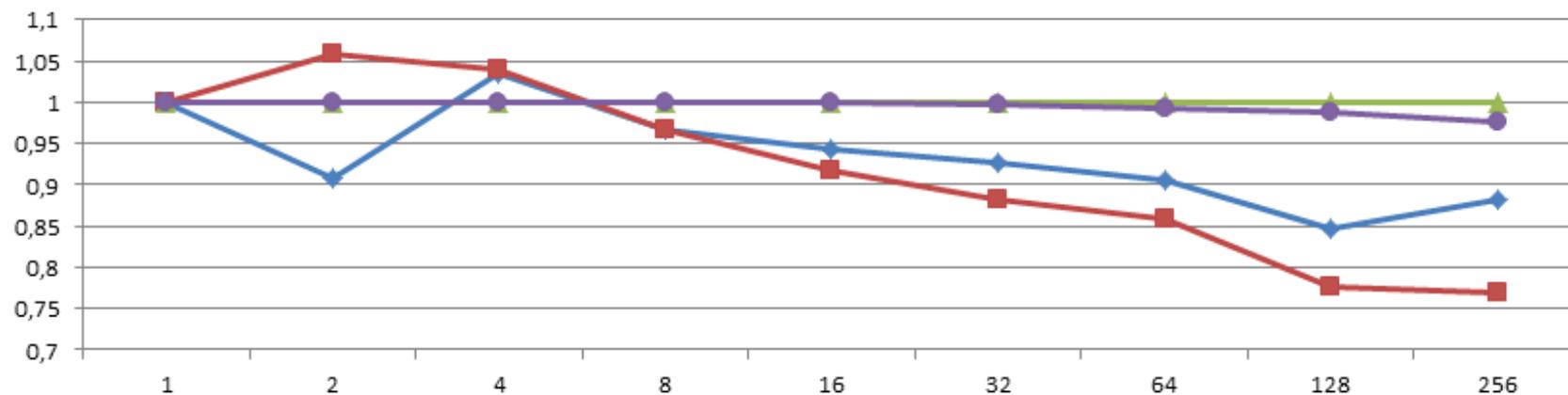
Число элементов	Доля параллельного кода	Макс. ускорение по закону Амдала	Реальное ускорение
585 508	99.98%	243	197
903 222	99.99%	249	226

Вихрь Орзага-Танга: Ускорение MPI

Ускорение расчетов



Эффективность параллельного алгоритма



Основные результаты

- Построены МГД и РМГД математические модели образования, коллимации и ускорения (вплоть до 5×10^4 км/с) плазменного выброса из окрестностей компактного объекта. Зафиксированы всплески скорости выброса, приводящие к образованию сгустков вещества в потоке.
- Разработаны численные методы решения системы уравнений МГД и уравнения переноса излучения в двумерной осесимметричной постановке на треугольной неструктурированной сетке.
- Численные методы реализованы в виде программного комплекса, предназначенного для высокопроизводительных систем с общей памятью (технологии OpenMP и nVidia CUDA), в том числе использующих графические ускорители. Достигнуто ускорение трассировки лучей (OpenMP) в 10.8 раз на 12 ядрах и вычисления интеграла рассеяния (CUDA) в 80 раз на картах nVidia Tesla C2050.
- Создан алгоритм для решения двумерных уравнений МГД разрывным методом Галеркина второго порядка на неструктурированных сетках, позволяющий получать бездивергентные распределения магнитного поля. Создана параллельная версия программы с использованием технологии MPI. На кластере K-100 достигнуто ускорение в 226 раз на 256 ядрах.
- В вычислительных экспериментах получен устойчивый во времени хорошо коллимированный выброс плазмы. Коллимация обеспечивается осевым и тороидальным магнитным полем. Ускорение вещества достигается за счет давления излучения аккреционного диска.

Благодарности

- Организаторам за приглашение
- Всем присутствующим за внимание

Галанин Михаил Павлович
galan@keldysh.ru