

# Аналитическое и численное моделирование периодических течений в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости с учетом эффектов диффузии

Васильев Алексей

Лаборатория механики жидкостей  
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Москва, Россия

Семинар

«Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и  
промышленности», 2014

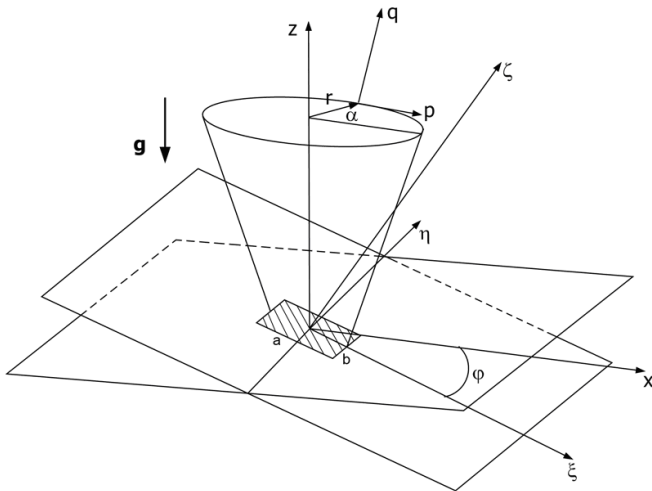
## Обзор

- 1 J.V.S. Rayleigh
- 2 J. Lighthill
- 3 Ю.Д. Чашечкин
- 4 В.А. Городцов
- 5 T.N. Stevenson
- 6 D.G. Hurley, G.J. Keady
- 7 B.R. Sutherland
- 8 Ю.В. Кистович
- 9 А.В. Кистович
- 10 А.Ю. Васильев
- 11 B. Voisin

## Цветная теневая картина осцилляций диска



## Системы координат задачи для построения аналитического решения



## Уравнения движения и граничные условия

## Уравнения движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v + \rho \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_S \Delta S + \frac{v_z}{\Lambda}$$

## Граничные условия

$$\mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}, \quad \kappa_S \left. \frac{\partial S}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$$

$$v \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \rho_0, \quad \partial P / \partial z \rightarrow \rho_0(z) g, \quad r \rightarrow \infty$$

## Торидиально-полоидальное разложение

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{e}_z \Phi + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z \Psi)$$

Система уравнений для скалярных функций  $\Phi$  и  $\Psi$ 

$$\left( \left( \frac{\partial}{\partial t} - D\Delta \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta \right) \Delta + N^2 \Delta_{\perp} \right) \Phi = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta \right) \Psi = 0$$

$$\left( \left( \frac{\partial}{\partial t} - D\Delta \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta \right) \Delta + N^2 \Delta_{\perp} \right) S = 0,$$

где

$$\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad N^2 = \sqrt{\frac{g}{\Lambda}}$$

# Построение решения для $\Phi$ и $\Psi$ с использованием преобразования Фурье

$$\Phi = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} A_j(k_\xi, k_\eta) E_j dk_\xi dk_\eta$$

$$S = -\frac{\rho_0}{\Lambda} e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k_\xi \cos \varphi - k_j \sin \varphi)^2 + k_\eta^2}{i\omega - \kappa_S k^2} A_j(k_\xi, k_\eta) E_j dk_\xi dk_\eta$$

$$\Psi = e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k_\xi, k_\eta) E_4 dk_\xi dk_\eta$$

где

$$E_j = \exp(ik_j \zeta + ik_\xi \xi + ik_\eta \eta), \quad k = \sqrt{k_j^2 + k_\xi^2 + k_\eta^2}$$

## Вязкая стратифицированная жидкость с учетом эффектов диффузии

Дисперсионное уравнение для волновых чисел

$$\left( \nu \kappa_S \tilde{k}^6 - i\omega (\nu + \kappa_S) \tilde{k}^4 - \omega^2 \tilde{k}^2 + N^2 k_{\perp}^2 \right) \left( \tilde{k}^2 + \frac{\omega}{i\nu} \right) = 0$$

$$\tilde{k}^2 = 2k_{\zeta}^2 + k_{\perp}^2, \quad k_{\perp}^2 = k_{\xi}^2 + k_{\eta}^2$$



## Вязкая стратифицированная жидкость с учетом эффектов диффузии

## Регулярное решение (волны)

$$k_1 = \frac{k_\xi \sin \varphi \cos \varphi \pm \kappa \cos \theta}{\mu_\theta} \pm \delta_N^2 (1 + \varepsilon) \frac{i \tan \theta \mu_\theta^4}{2\kappa \mu^4} + \dots$$

$$\mu = \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta, \quad \mu_\theta = (k_\xi \sin \varphi \cos \varphi \pm \kappa \cos \varphi),$$

$$\varepsilon = Sc^{-1} = \frac{\kappa S}{\nu}, \quad \delta_N = \sqrt{\frac{\nu}{N}}$$

## Сингулярное решение

$$k_{2,3} \approx \sqrt{\frac{i\omega(\varepsilon + 1 \pm \lambda_{\nu\kappa})}{\varepsilon}}, \quad \lambda_{\nu\kappa} = \frac{2}{\sin \theta} \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \frac{4\varepsilon\mu}{\sin^2 \theta}}$$

$$k_4 = \sqrt{\frac{2i}{\delta_\nu^2} - k^2}, \quad \delta_\nu = \delta_N \sqrt{\frac{2}{\sin \theta}}, \quad \delta_\varphi = \delta_N \sqrt{\frac{2 \sin \theta}{|\mu|}}, \quad \delta_\kappa = \delta_N \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\sin \theta}}$$

# Вязкая стратифицированная жидкость с учетом эффектов диффузии. Вертикальная компонента скорости

$$v_\zeta \approx \int_{-\infty}^{+\infty} A_1 (k_\eta^2 \sin \varphi - k_\xi \beta_1) E_1 dk_\xi dk_\eta -$$

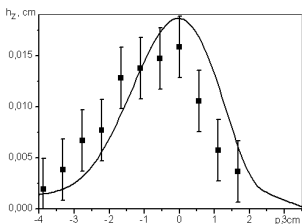
$$-ie^{\frac{i-1}{\delta\nu}\zeta} \sin \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} B E_{\xi\eta} dk_\xi dk_\eta - \frac{i+1}{\delta\varphi} e^{\frac{i-1}{\delta\varphi}\zeta} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A_2 k_\xi E_{\xi\eta} dk_\xi dk_\eta -$$

$$-\frac{1+i}{\delta\kappa} \sqrt{\frac{\sin \theta}{2}} e^{-\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\delta\kappa\sqrt{2}}\zeta + \frac{i\zeta}{\delta\kappa\sqrt{2}}} \cos \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A_3 k_\xi E_{\xi\eta} dk_\xi dk_\eta$$

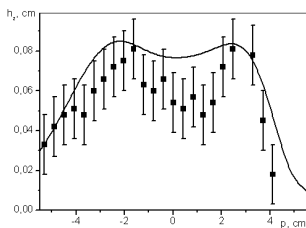
где

$$E_{\xi\eta} = \exp(ik_\xi \xi + ik_\eta \eta)$$

# Сравнение аналитического расчета с данными эксперимента. Источник диск $u_0 = 0.25 \text{ cm s}^{-1}$



$$R = 1.75 \text{ cm}, N = 1.0 \text{ s}^{-1}, \omega = 0.57 \text{ s}^{-1}$$



$$R = 4.0 \text{ cm}, N = 1.26 \text{ s}^{-1}, \omega = 1.11 \text{ s}^{-1}$$

## Почему OpenFOAM?

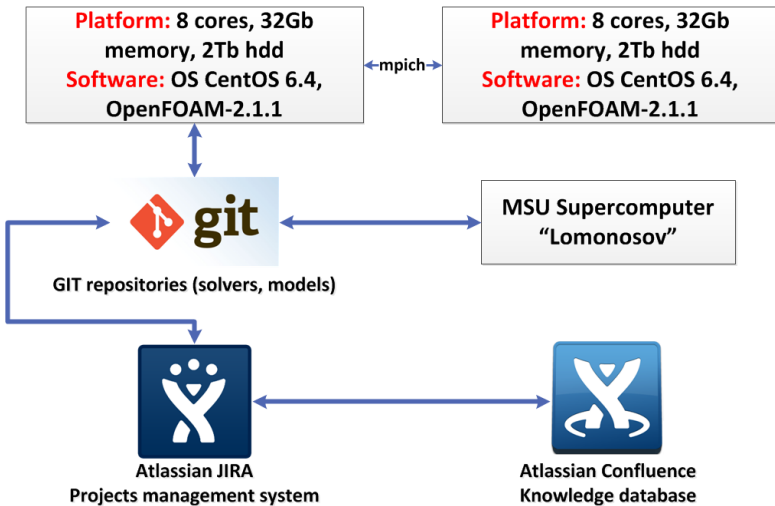
### Плюсы:

- 1 OpenFOAM СПО и open source, использующие GNU лицензию (GPL).
- 2 Поддержка сообщества  
<http://www.cfd-online.com/Forums/openfoam/>,  
<http://openfoamwiki.net/>
- 3 Поддержка open-source Linux платформ (openSUSE, Ubuntu, Fedora и т.п.)

### Минусы:

- 1 OpenFOAM не имеет GUI интерфейса для создания сеток, но можно использовать другие приложения: GMSH (<http://geuz.org/gmsh/>), Salome (<http://www.salome-platform.org/>) или коммерческие сеточные генераторы: Icem CFD ([www.ansys.com](http://www.ansys.com)), Gambit ([www.ansys.com](http://www.ansys.com)), pro\*star Star-CD ([www.cd-adapco.com](http://www.cd-adapco.com))

# Инфраструктура для проведения численных расчетов



## Структура решателя. IGWFoam.C

## Уравнение Навье-Стокса

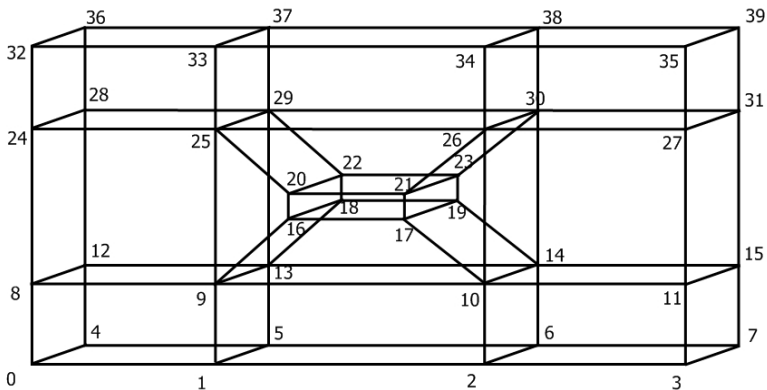
```
fvVectorMatrix UEqn (  
    fvm::ddt(U) + fvm::div(phi, U)  
    - fvm::laplacian(nu, U) - S*g  
);  
solve(UEqn == -fvc::grad(p)/dens0);
```

Уравнения для солености  $S$  и плотности  $dens$ 

```
fvScalarMatrix SEqn (  
    fvm::ddt(S) + fvm::div(phi, S)  
    - fvm::laplacian(DS, S)  
    - U.component(vector::Z)/Lambda  
);  
SEqn.solve();  
dens = dens0*(1.0-Z/Lambda+S);
```

## Создание O-grid модели

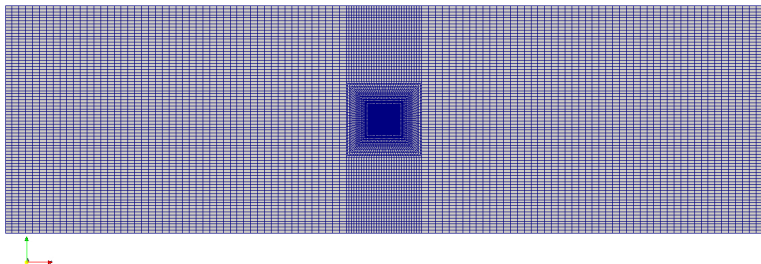
Для построения сетки используется стандартная утилита OpenFOAM **blockMesh** или **pyFoam** (Python для OpenFOAM)



## Генерация сетки для численной модели

Создание численной сетки используя blockMesh  
утилиту:

```
[user@server]$ blockMesh -case name-of-model
```

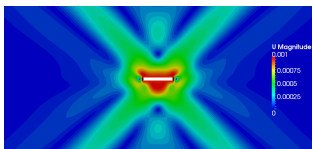


**Граничные условия:** Top, Bottom, Left, Right: freeStream  
(U, p), zeroGradient (S) Plate: oscillating (U), fixedGradient (S)

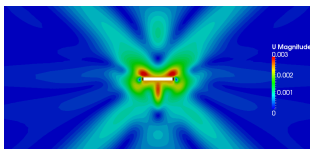




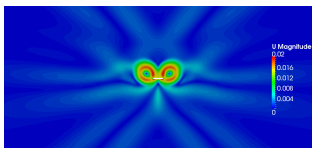
Различные скорости  $L_x = 1 \text{ cm}$ ,  $N = 0.9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.54 \text{ s}^{-1}$   
Модуль скорости. Источник - горизонтальная пластина.



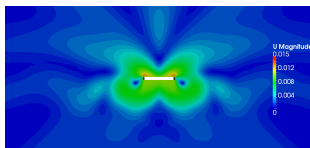
$$u_0 = 0.001 \text{ m s}^{-1}$$



$$u_0 = 0.0025 \text{ m s}^{-1}$$

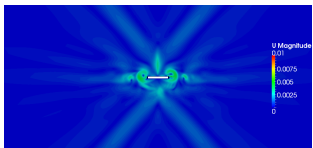


$$u_0 = 0.025 \text{ m s}^{-1}$$

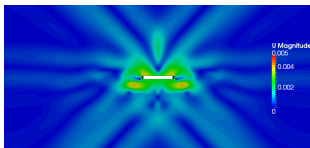


$$u_0 = 0.01 \text{ m s}^{-1}$$

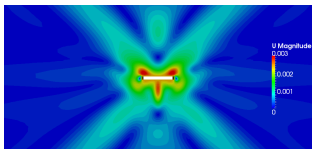
Различные вязкости  $L_x = 1 \text{ cm}$ ,  $N = 0.9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.54 \text{ s}^{-1}$   
Модуль скорости. Источник - горизонтальная пластина.



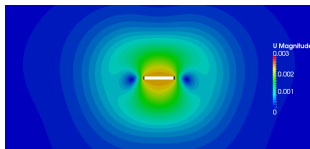
$$\nu = 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$



$$\nu = 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

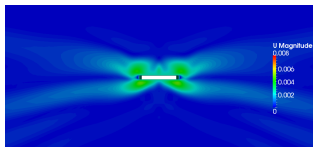


$$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

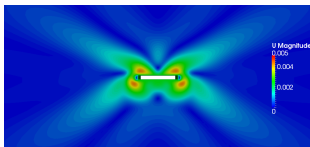


$$\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

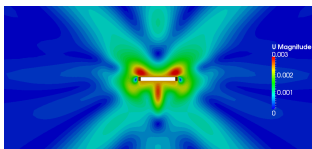
Различные стратификации  $L_x = 1 \text{ cm}$ ,  $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega = 0.54 \text{ s}^{-1}$   
Модуль скорости. Источник - горизонтальная пластина.



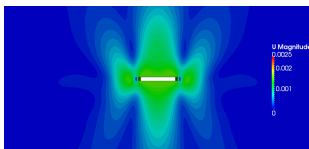
$$N = 2.8 \text{ s}^{-1}$$



$$N = 1.46 \text{ s}^{-1}$$



$$N = 0.7 \text{ s}^{-1}$$



$$N = 0.58 \text{ s}^{-1}$$

## Заключение

- 1 В общем случае в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости с учетом эффектов диффузии существует два типа решений регулярное (волны) и три типа сингулярных решений. Два из них не имеют аналога в однородной жидкости, их свойства определяются геометрией задачи, вязкостью, стратификацией и диффузией.
- 2 Для полного описания задачи течения вязкой неоднородной жидкости необходимо учитывать все факторы (вязкость, стратификацию и диффузию);
- 3 С использованием возможностей OpenFOAM построен решатель для расчета течений вязкой стратифицированной жидкости.
- 4 Проведены вычисления для горизонтальной пластины.